MỤC LỤC

▶CHƯƠNG I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Bài 1 – TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ.

a) Khái niệm tính đơn điệu của hàm số.

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y=f\left(x\right)$ là hàm số xác định trên K.

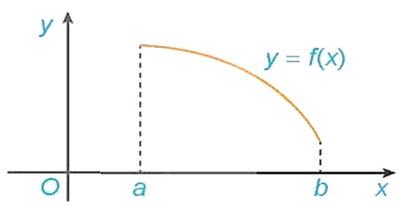
Hàm số $y=f\left(x\right)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1,x_2\in K, x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1,x_2\in K, x_1\left\langle x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)\right\rangle f\left(x_2\right)$.

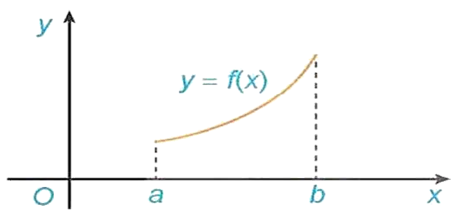
Chú ý

Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải

Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải



a) Hàm số đồng biến trên $\left(a;b\right)$.



b) Hàm số nghịch biến trên (a; b).

Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên K còn được gọi chung là đơn điệu trên K. Việc tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số còn được gọi là tìm các khoảng đơn điệu (hay xét tính đơn điệu) của hàm số.

Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

ĐỊNH LÍ.

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên khoảng K.

Nếu $f'\left(x\right)>0$ với mọi $x\in K$ thì hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng K.

Nếu $f'\left(x\right)<0$ với mọi $x\in K$ thì hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng K.

Chú ý.

Định lí trên vẫn đúng trong trường hợp $f'\left(x\right)$ bằng 0 tại một số hữu hạn điểm trong khoảng K.

Người ta chứng minh được rằng, nếu $f'\left(x\right)=0$ với mọi $x\in K$ thì hàm số $f\left(x\right)$ không đổi trên khoảng K.

b) Sử dụng bảng biến thiên xét tính đơn điệu của hàm số:

Các bước để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$:

①. Tìm tập xác định của hàm số.

②. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\ (i=1,2,\dots)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

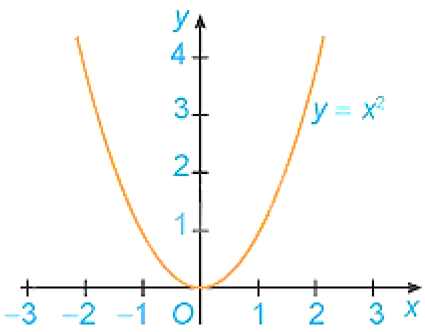
③. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên của hàm số.

④. Nêu kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Trả lời câu hỏi Hoạt động 1 trang 6 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Quan sát đồ thị của hàm số $y = x^2$ (H.1.2)



Hình 1.2

a) Hàm số đồng biến trên khoảng nào?
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng nào?

Phương pháp giải:
Sử dụng kiến thức về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến: Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 \langle x_2 \Rightarrow f(x_1) \rangle f(x_2)$

Lời giải

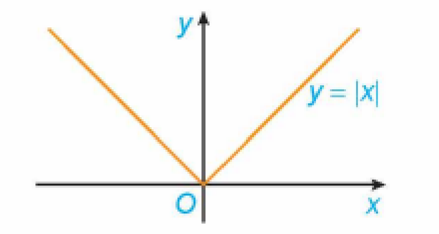
Từ đồ thị ta thấy:

Xét khoảng $(0;+\infty)$: $\forall x_1, x_2 \in (0;+\infty), x_1 < x_2$ thì $x_1^2 < x_2^2$ hay $f(x_1) < f(x_2)$.
Suy ra, hàm số $y = x^2$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Xét khoảng $(-\infty;0)$: $\forall x_1, x_2 \in (-\infty;0), x_1 < x_2$ thì $x_1^2 > x_2^2$ hay $f(x_1) > f(x_2)$.
Suy ra, hàm số $y = x^2$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Ví dụ 1: Hình 1.4 là đồ thị của hàm số $y = f(x) = |x|$. Hãy tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.

Lời giải



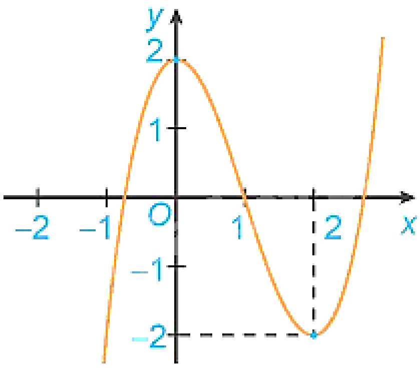
Hình 1.4

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Từ đồ thị suy ra: Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 1 trang 6 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Hình 1.5 là đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Hãy tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số.



Hình 1.5

Phương pháp giải:
Sử dụng kiến thức về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến:

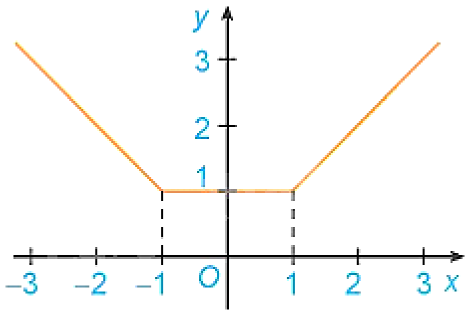
Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải.

Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
Trong khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$ thì đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ đi lên từ trái sang phải nên hàm số $y=x^3-3x^2+2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.
Trong khoảng $(0;2)$ thì đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ đi xuống từ trái sang phải nên hàm số $y=x^3-3x^2+2$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Trả lời câu hỏi Hoạt động 2 trang 6 SGK Toán 12 Kết nối tri thức



Hình 1.6

a) Xét dấu đạo hàm của hàm số trên các khoảng $(-\infty;-1),(1;+\infty)$. Nêu nhận xét về mối quan hệ giữa tính đồng biến, nghịch biến và dấu của đạo hàm trên mỗi khoảng này.
b) Có nhận xét gì về đạo hàm y' của hàm số y trên khoảng $(-1;1)$?

Phương pháp giải:
Sử dụng kiến thức về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số để tìm nhận xét:

Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải.

Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải.

Lời giải

a) + Xét khoảng $(-\infty;-1)$ ta có: $y'=(-x)'=-1<0$

Trong khoảng $(-\infty;-1)$ ta thấy hàm số y nghịch biến và đạo hàm $y'<0$.

Xét khoảng $(1;+\infty)$ ta có: $y'=x'=1>0$
Trong khoảng $(1;+\infty)$ ta thấy hàm số y đồng biến và đạo hàm $y'>0$.
b) Trong khoảng $(-1;1)$ ta có: $y'=(1)'=0$

Trong khoảng $(-1;1)$ ta thấy hàm số y không đổi và đạo hàm $y'=0$.

Ví dụ 2: Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số $y=x^2-4x+2$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=2x-4; y'>0$ với $x\in(2;+\infty); y'<0$ với $x\in(-\infty;2)$.

Do đó, hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 2 trang 7 SGK Toán 12 Kết nối tri thức
Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số $y=-x^2+2x+3$.
Phương pháp giải:
Sử dụng kiến thức về định lí về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x\in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng K.

Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x\in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng K.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
Ta có: $y'=-2x+2, y'>0$ với $x\in(-\infty;1)$; $y<0$ với $x\in(1;+\infty)$.
Do đó, hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Trả lời câu hỏi Hoạt động 3 trang 7 SGK Toán 12 Kết nối tri thức
Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+2x+1$.

a) Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm x mà $f'(x)=0$.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số, tức là lập bảng thể hiện dấu của đạo hàm và sự đồng biến, nghịch biến của hàm số trên các khoảng tương ứng.
c) Nếu kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Lời giải

a) $f'(x)=\left(x^3-3x^2+2x+1\right)'=3x^2-6x+2$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\\[2mm] x=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$$

Vậy $x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}, x=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ thì $f'(x)=0$
b) Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$		$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{9+2\sqrt{3}}{9}$	↘	$\frac{9-2\sqrt{3}}{9}$	↗	$+\infty$

c) Hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$ và $\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$.

Hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3};\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$.

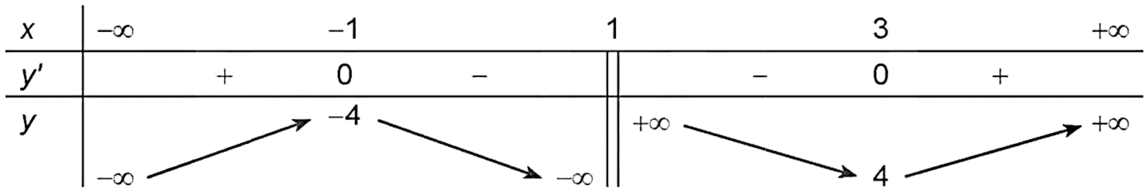
Ví dụ 3: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+5)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=3$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:



Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1;1)$ và $(1;3)$.

Ví dụ 4: Xét chiều biến thiên của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$.

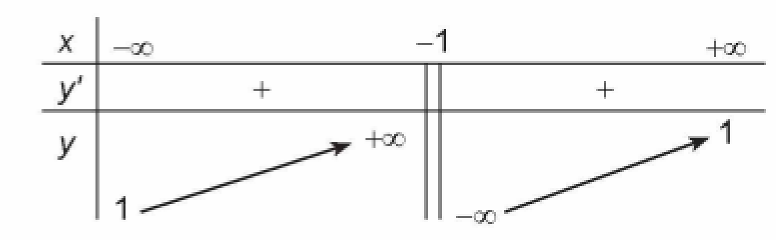
Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{(x+1)-(x-2)}{(x+1)^2}=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0$, với mọi $x\neq-1$.

Việc tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số còn được nói gọn là xét chiều biến thiên của hàm số.

Lập bảng biến thiên của hàm số:



Từ bảng biến thiên, ta có: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 3 trang 9 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{1}{3}x^3+3x^2+5x+2$; b) $y=\dfrac{-x^2+5x-7}{x-2}$.

Phương pháp giải:

Sử dung kiến thức về các bước để xét tính đơn điệu của hàm số để tìm khoảng đơn điệu của hàm số: Các bước để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$:

Tìm tập xác định của hàm số.

Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i\,(i = 1, 2, \ldots)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên của hàm số.

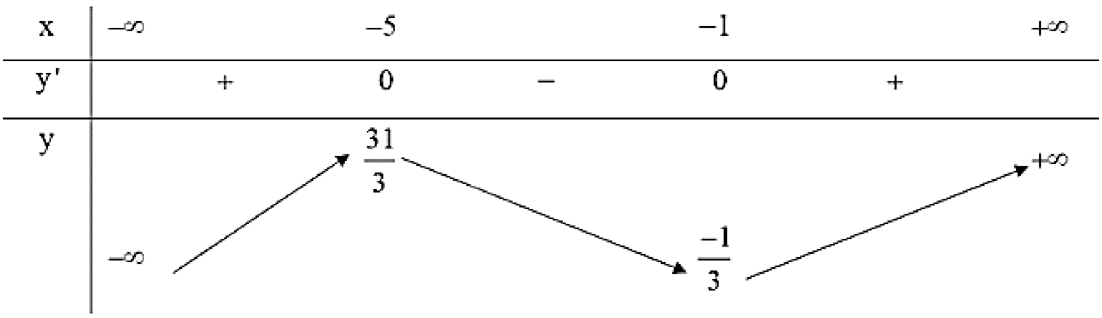
Nêu kết luận về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 + 6x + 5, y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -5 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên của hàm số:



Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 5x + 2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-1; +\infty)$.

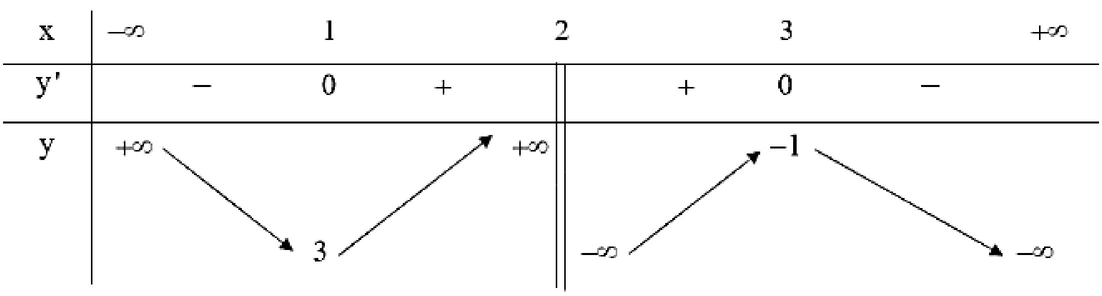
Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 5x + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-5; -1)$.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có: $y' = \frac{(-2x+5)(x-2) - (-x^2 + 5x - 7)}{(x-2)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{(x-2)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Lập bảng biến thiên của hàm số:



Hàm số $y=\dfrac{-x^2+5x-7}{x-2}$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$ và $(2;3)$.

Hàm số $y=\dfrac{-x^2+5x-7}{x-2}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$.

Trả lời câu hỏi Vận dụng 1 trang 9 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Giải bài toán trong tình huống mở đầu bằng cách thực hiện lần lượt các yêu cầu sau:
a) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc v(t) là đạo hàm của s(t). Hãy tìm vận tốc v(t).
b) Xét dấu của hàm v(t), từ đó suy ra câu trả lời.

Bài toán mở đầu:
Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải (H.1.1). Giả sử vị trí $s(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức $s(t)=t^3-9t^2+15t, t\ge 0$. Hỏi trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang phải, trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang trái?

Hình 1.1

Phương pháp giải:
a) Sử dụng, kiến thức về ý nghĩa cơ học của đạo hàm để tìm hàm vận tốc: Theo ý nghĩa cơ học, vận tốc v(t) là đạo hàm của hàm số $s(t)$.

b) Chất điểm chuyển động theo chiều dương khi $v(t)>0$.

Chất điểm chuyển động theo chiều âm khi $v(t)<0$

Lời giải

a) Ta có: $v(t)=s'(t)=\left(t^3-9t^2+15t\right)'=3t^2-18t+15$

b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $v(t)>0\Leftrightarrow 3t^2-18t+15>0\Leftrightarrow (t-1)(t-5)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<1 \\ t>5 \end{array}\right.$

$$v(t)<0\Leftrightarrow 3t^2-18t+15<0\Leftrightarrow (t-1)(t-5)<0\Leftrightarrow 1<t<5$$

Chất điểm chuyển động theo chiều dương (sang bên phải) khi $v(t)>0$, tức là $t\in(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$.
Chất điểm chuyển động theo chiều âm (sang bên trái) khi $v(t)<0$, tức là $1<t<5$.

II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

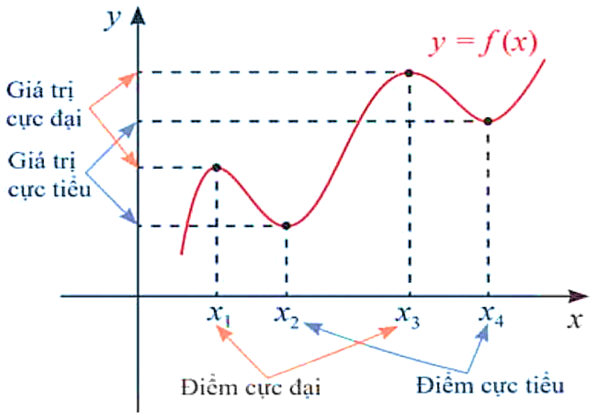
a) Khái niệm cực trị của hàm số:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (a có thể là $-\infty, b$ có thể là $+\infty$) và điểm $x_0\in(a;b)$.

Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.

Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

Chú ý



Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là $f_{CĐ}$ hay $y_{CĐ}$. Điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT}.

Điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.

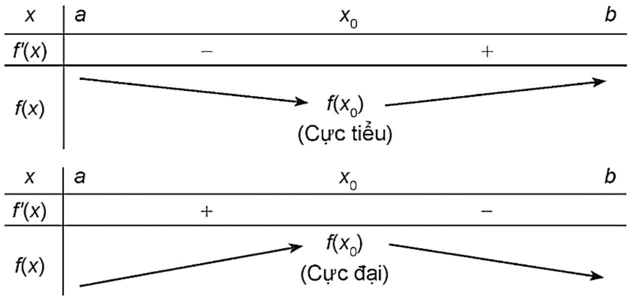
b) Cách tìm cực trị của hàm số:

ĐỊNH LÍ

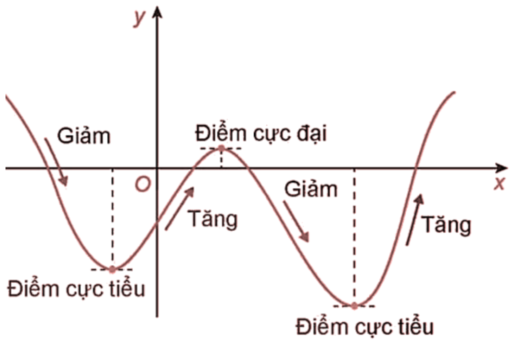
Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó:

a) Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

b) Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.



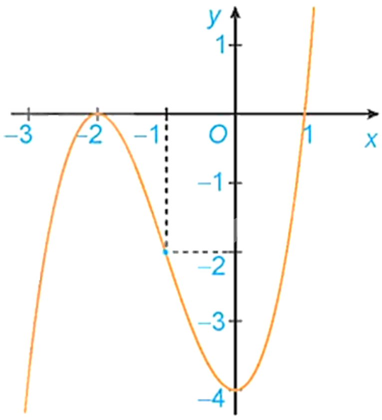
Chú ý:



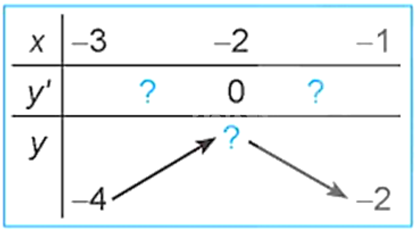
GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

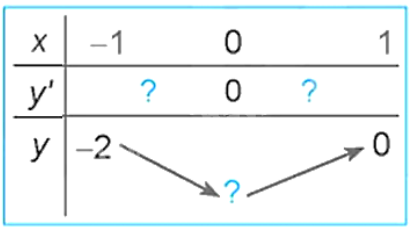
Trả lời câu hỏi Hoạt động 4 trang 9 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Quan sát đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ (H.1.7). Xét dấu đạo hàm của hàm số đã cho và hoàn thành các bảng sau vào vở:



Hình 1.7





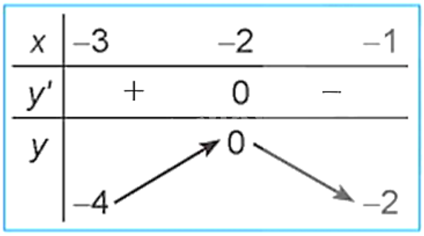
Phương pháp giải:

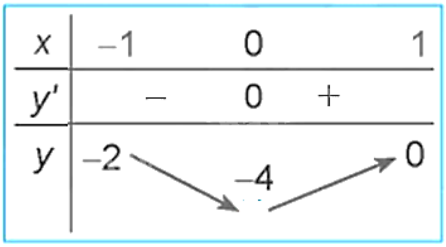
Sử dụng kiến thức về định lí về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K.

Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng K.

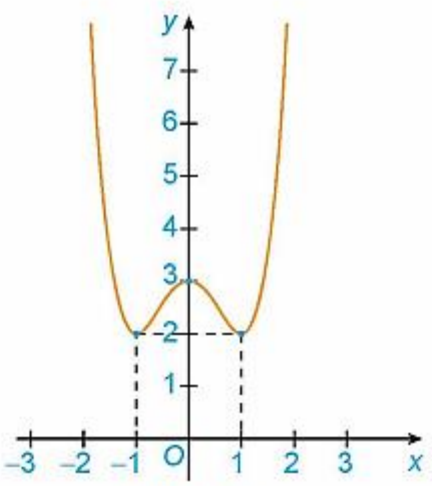
Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng K.

Lời giải





Ví dụ 5: Hình 1.8 là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hãy tìm các cực trị của hàm số.



Hình 1.8

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

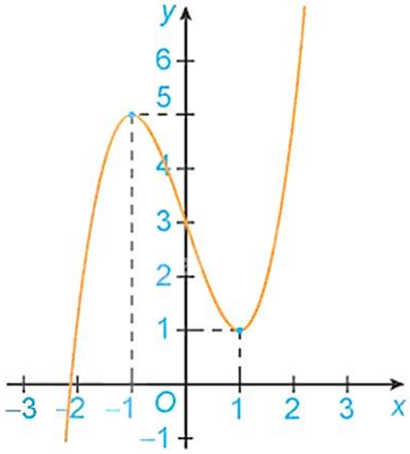
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $y_{CT} = y(-1) = 2$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CE} = y(0) = 3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và $y_{CT}=y(1)=2$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 4 trang 10 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Hình 1.9 là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Hãy tìm các cực trị của hàm số.



Hình 1.9

Phương pháp giải:

Sử dụng kiến thức về định nghĩa cực đại, cực tiểu của hàm số để tìm cực đại, cực tiểu của hàm số:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0\in(a;b)$.

Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\ne x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.

Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\ne x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và $y_{CT}=y(1)=1$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và $y_{CD}=y(-1)=5$

Trả lời câu hỏi Hoạt động 5 trang 10 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+1$.

a) Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số.

c) Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị của hàm số.

Phương pháp giải:

Sử dụng kiến thức về định nghĩa cực đại, cực tiểu của hàm số để tìm cực đại, cực tiểu của hàm số:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0\in(a;b)$.

Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.

Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

Lời giải

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$y'=x^2-6x+8,\ y'=0\Leftrightarrow x^2-6x+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=2\end{array}\right.$$

Vậy $x=4;x=2$ thì $f'(x)=0$

b) Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{23}{3}$	$\searrow$	$\frac{19}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

c) Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+1$ có điểm cực đại là $\left(2;\frac{23}{3}\right)$.

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+1$ có điểm cực tiểu là $\left(4;\frac{19}{3}\right)$.

Ví dụ 6: Tìm cực trị của hàm số $y=x^3-6x^2+9x+30$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-12x+9; y'=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=3$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	34	$\searrow$	30	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và $y_{CD}=y(1)=34$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ và $y_{CT}=y(3)=30$.

Ví dụ 7: Tìm cực trị của hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+9}{x-2}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{(2x-2)(x-2)-\left(x^2-2x+9\right)}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}; y'=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=5$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và $y_{CD}=y(-1)=-4$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=5$ và $y_{CT}=y(5)=8$.

Ví dụ 8: Tìm cực trị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0$, với mọi $x\neq 1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số không có cực trị.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 5 trang 12 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=x^4-3x^2+1$;

b) $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$.

Phương pháp giải:

Sử dụng kiến thức về cách tìm cực trị của hàm số $y=f(x)$ để tìm cực trị của hàm số:

Tìm tập xác định của hàm số.

Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.

Lập bảng biến thiên của hàm số.

Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=4x^3-6x, y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$;

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$		0		$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\dfrac{5}{4}$	↗	1	↘	$-\dfrac{5}{4}$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và .

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ và $y_{CT}=\dfrac{-5}{4}$.

b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{(-2x+2)(x+2)-(-x^2+2x-1)}{(x+2)^2}=\dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2}$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=1 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có:
Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và .
Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-5$ và $y_{CT}=12$.

Trả lời câu hỏi Vận dụng 2 trang 12 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc ban đầu là $24,5$ m/s. Trong Vật lí, ta biết rằng khi bớ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bới công thức: $h(t)=2+24,5t-4,9t^2$. Hỏi tại thời điểm nào thì vật đạt độ cao lớn nhất?

Phương pháp giải:

Sử dụng kiến thức về cách tìm cực trị của hàm số $y=f(x)$ để tìm thời điểm vật đạt độ cao lớn nhất:

Tìm tập xác định của hàm số.

Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.

Lập bảng biến thiên của hàm số.

Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

Lời giải

Xét hàm số: $h(t)=2+24,5t-4,9t^2$.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có:

$$h'(t)=-9,8t+24,5; h'(t)=0 \Leftrightarrow -9,8t+24,5=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{261}{8}$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $t=\frac{5}{2}$,

Vậy thời điểm vật đạt độ cao lớn nhất là $t=\frac{5}{2}$ giây

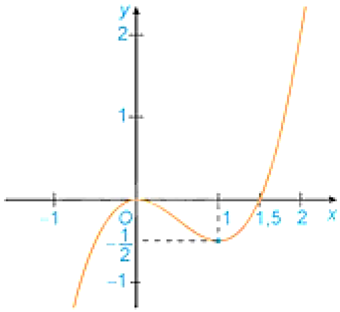
III. GIẢI BÀI TẬP SGK

Bài 1: Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của các hàm số có đồ thị như sau:

a) Đồ thị hàm số $y=x^3-\frac{3}{2}x^2$ (H.1.11);

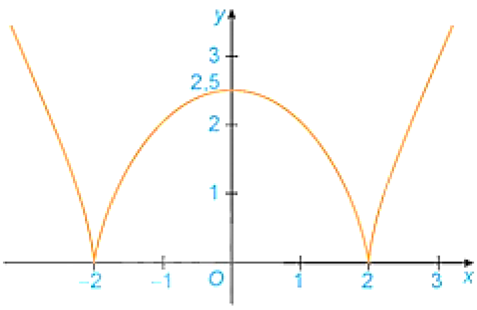
Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của các hàm số có đồ thị như sau:

a) Đồ thị hàm số $y=x^3-\frac{3}{2}x^2$



Hình 1. 11

b) Đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}$



Hình 1.12

Lời giải

a) Hàm số $y=x^3-\frac{3}{2}x^2$ đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$. Hàm số $y=x^3-\frac{3}{2}x^2$ nghịch biến trên $(0;1)$.

b) Hàm số $y=\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}$ đồng biến trên $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$. Hàm số $y=\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Bài 2: Xét sự đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$;   b) $y=-x^3+2x^2-5x+3$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=x^2-4x+3, y'=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{7}{3}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$.

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-3x^2+4x-5$

Vì $-3x^2+4x-5=-3\left(x^2-2\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)-\frac{11}{3}=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{11}{3}<0 \forall x\in\mathbb{R}$

Do đó, $y'<0 \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y=-x^3+2x^2-5x+3$ nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Bài 3: Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y=\frac{2x-1}{x+2}$;   b) $y=\frac{x^2+x+4}{x-3}$.

Phương pháp giải - Xem chi tiết

Lời giải

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có: $y'=\frac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}=\frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)}>0 \forall x\neq -2$

Do đó, hàm số $y=\frac{2x-1}{x+2}$ đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{\left(x^2+x+4\right)'(x-3)-\left(x^2+x+4\right)(x-3)'}{(x-3)^2} = \dfrac{(2x+1)(x-3)-x^2-x-4}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2-6x-7}{(x-3)^2}$

$y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-6x-7}{(x-3)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-1 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
y'		+	0	−	||	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	15	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số $y=\dfrac{x^2+x+4}{x-3}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$ và $(3;7)$.

Hàm số $y=\dfrac{x^2+x+4}{x-3}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(7;+\infty)$.

Bài 4: Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{4-x^2}$; b) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D=[-2;2]$.

Ta có: $y' = \dfrac{\left(4-x^2\right)'}{2\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}, y'=0 \Leftrightarrow x=0(tm)$

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	-2		0		2
y'		+	0	−	
y	0	↗	4	↘	0

Hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = \dfrac{\left(x^2+1\right)-2x\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}, y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Hàm số $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1),(1;+\infty)$.

Hàm số $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Bài 5: Giả sử số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số $N(t)=\dfrac{25t+10}{t+5}, t\geq 0$, trong đó $\mathrm{N}(\mathrm{t})$ được tính bằng nghìn người.

a) Tính số dân của thị trân đó vão các năm 2000 và 2015.

b) Tính đạo hàm $N'(t)$ và $\lim_{t\to+\infty}N(t)$. Từ đó giải thích tại sao dân số của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt qua một ngưỡng nào đó.

Lời giải

a) Dân số của thị trấn đó vào năm 2000 là: $N(0)=\dfrac{25.0+10}{0+5}=\dfrac{10}{5}=2$ (nghìn người)

Dân số của thị trấn đó vào năm 2015 là: $N(15)=\dfrac{25.15+10}{15+5}=19,25$ (nghìn người)

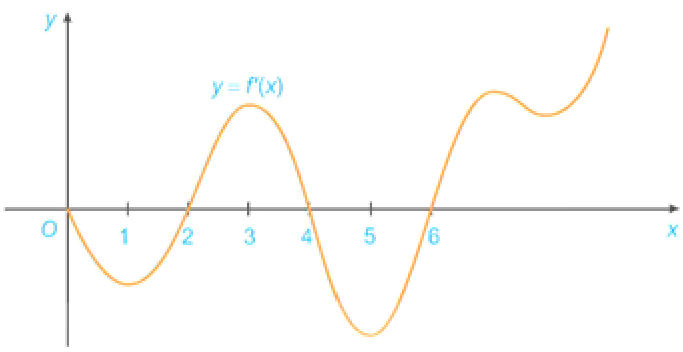
b) Ta có: , $\lim_{t\to+\infty}N(t)=\lim_{t\to+\infty}\dfrac{25t+10}{t+5}=\lim_{t\to+\infty}\dfrac{25+\frac{10}{t}}{1+\frac{5}{t}}=25$

Vì $\lim_{t\to+\infty}N(t)=25$ và nên dân số của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt qua ngưỡng 25 nghìn người.

Bài 6: Đồ thị của đạo hàm bậc nhất y = f'(x) của hàm số f(x) được cho trong hình 1.13.

a) Hàm số f(x) đồng biến trên những khoảng nào? Giải thích.

b) Tại giá trị nào của x thì f(x) có cực đại và cực tiểu? Giải thích.



Hình 1.13

Lời giải

Dựa vào đồ thị của hàm $y = f'(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	0		2		4		6		$+\infty$
y'	0	−	0	+	0	−	0	+	
y	f(0)	↘	f(2)	↗	f(4)	↘	f(6)	↗	

a) Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đồng biến trên các khoảng (2; 4) và (6; +∞).

b) Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 2 và x = 6.

Hàm số đạt cực đại tại x = 4.

Bài 7: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$;   b) $y = x^4 - 4x^2 + 2$;

c) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$;   d) $y = \sqrt{4x - 2x^2}$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Có $y' = 6x^2 - 18x + 12; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$.

Lập bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CE} = 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $yc\,T = -1$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Có $y' = 4x^3 - 8x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -\sqrt{2}$ hoặc $x = \sqrt{2}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\sqrt{2}$ và $y_{CT} = -2$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = 2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \sqrt{2}$ và $y_{CT} = -2$.

c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Có $y' = \dfrac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 3)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$;

Có $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}$ hoặc $x = 1 + \sqrt{2}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 - \sqrt{2}$ và $y_{CĐ} = -2\sqrt{2}$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 + \sqrt{2}$ và $y_{CT} = 2\sqrt{2}$.

d) Tập xác định của hàm số là $D = [0; 2]$.

Có $y' = \dfrac{(4x - 2x^2)'}{2\sqrt{4x - 2x^2}} = \dfrac{2(1-x)}{\sqrt{4x - 2x^2}}$.

Có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số

x	0		1		2
y'	||	+	0	-	||
y	0	↗	$\sqrt{2}$	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Hàm số đạt cực đại tại x $=1$ và $y_{CĐ}=\sqrt{2}$.

Hàm số không có cực tiểu.

Bài 8: Cho hàm số $y=f(x)=|x|$.

a) Tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ và $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Từ đó suy ra hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

b) Sử dụng định nghĩa, chứng minh hàm số có cực tiểu tại $x=0$. (Xem Hình 1.4)

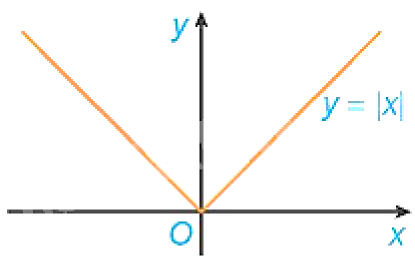
Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$

$$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$$

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)=|x|$:



Ta có: $y=f(x)=|x|=\begin{cases}-x & \text{khi } x\in(-\infty;0)\\ x & \text{khi } x\in(0;+\infty)\end{cases}$

Hàm số $y=f(x)=|x|$ liên tục và xác định trên $(-\infty;+\infty)$

Với số $h>0$ ta có: Với $x\in(-h;h)\subset(-\infty;+\infty)$ và $x\neq 0$ thì $y=f(x)=|x|>0=f(0)$

Do đó, hàm số $y=f(x)=|x|$ có cực tiểu là $x=0$.

Bài 9: Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t)=\dfrac{5000}{1+5e^{-t}}, t\ge 0$, trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Lời giải

Ta có: $f'(t)=\dfrac{-5000\left(1+5e^{-t}\right)'}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}=\dfrac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$

Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

Đặt $h(t)=\dfrac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$.

$$h'(t)=\frac{-25000e^{-t}\left(1+5e^{-t}\right)^2-2.\left(-5e^{-t}\right)\cdot\left(1+5e^{-t}\right)\cdot 25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^4}$$

$$=\frac{-25000e^{-t}\left(1+5e^{-t}\right)\left(1+5e^{-t}-10e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^4}=\frac{-25000e^{-t}\left(1-5e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^3}$$

$$h'(t)=0\Leftrightarrow\frac{-25000e^{-t}\left(1-5e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^3}=0\Leftrightarrow 1-5e^{-t}=0\Leftrightarrow e^{-t}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow t=\ln 5\left(\text{tm}\right)$$

Ta có bảng biến thiên với $t\in[0;+\infty)$:

t	0		ln5		$+\infty$
h'(t)		+	0	−	
h(t)			1250		
		↗		↘	
	$\frac{6250}{9}$				0

Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5\approx 1,6$ năm thì thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

Bài 2 – GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \le M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu $M = \max_{x\in D} f(x)$ hoặc $M = \max_D f(x)$.

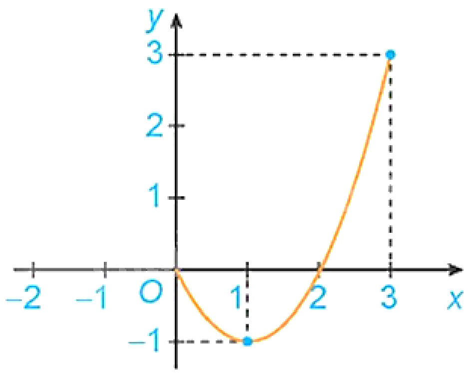
Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \ge m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu $m = \min_{x\in D} f(x)$ hoặc $m = \min_D f(x)$.

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Trả lời câu hỏi Hoạt động 1 trang 15 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x$ với $x \in [0;3]$, có đồ thị như Hình 1.15.



Hình 1.15

a) Giá trị lớn nhất M của hàm số trên đoạn $[0;3]$ là bao nhiêu? Tìm x_0 sao cho $f(x_0)=M$.

b) Giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên đoạn $[0;3]$ là bao nhiêu? Tìm x_0 sao cho $f(x_0)=m$.

Phương pháp giải:
Sử dụng kiến thức về đọc hiểu đồ thị hàm số.

Lời giải

a) Giá trị lớn nhất của đồ thị hàm số trên đoạn $[0;3]$ là $M=3$.

Với $x_0=3$ thì $f(3)=3$.

b) Giá trị nhỏ nhất của đồ thị hàm số trên đoạn $[0;3]$ là $m=-1$.

với $x_0=1$ thì $f(1)=-1$.

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $[-1;1]$.

Cách 1. Sử dụng định nghĩa.

Ta có:

$f(x)=\sqrt{1-x^2}\geq 0$; dấu bằng xảy ra khi $1-x^2=0$, tức là khi $x=-1$ hoặc $x=1$.

$$\text{Do đó } \min_{[-1;1]} f(x)=f(-1)=f(1)=0.$$

$f(x)=\sqrt{1-x^2}\leq 1$; dấu bằng xảy ra khi $1-x^2=1$, tức là khi $x=0$. Do đó $\max_{[-1;1]} f(x)=f(0)=1$.

Cách 2. Sử dụng bảng biến thiên.

Với $x\in(-1;1)$, ta có: $y'=\dfrac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $y'=0\Leftrightarrow x=0$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên đoạn [-1; 1]:

x	-1		0		1
y'	||	$+$	0	$-$	||
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên, ta được: $\min_{[-1;1]} f\left(x\right)= f\left(-1\right)= f\left(1\right)=0; \max_{[-1;1]} f\left(x\right)= f\left(0\right)=1$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = x-2+\frac{1}{x}$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Lời giải

Ta có: $y' = 1-\frac{1}{x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x=1$ (vì $x>0$).

Tính các giới hạn:

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+}\left(x-2+\frac{1}{x}\right)=+\infty;\ \lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty}\left(x-2+\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$:

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được: $\min_{(0;+\infty)} y = y\left(1\right)=0$;

hàm số không có giá trị lớn nhất trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 1 trang 17 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{2x-x^2}$

b) $y=-x+\frac{1}{x-1}$ trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

Phương pháp giải:

Sử dụng kiến thức về khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số để tính: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên tập D.

Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên tập D nếu $f(x)\le M$ với mọi $x\in D$ và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=M$.

Kí hiệu $M=\max_{x\in D} f(x)$ hoặc $M=\max_D f(x)$

Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên tập D nếu $f(x)\ge m$ với mọi $x\in D$ và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=m$.

Kí hiệu $m=\min_{x\in D} f(x)$ hoặc $m=\min_D f(x)$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số là $[0;2]$.

Với $x\in[0;2]$ ta có: $y'=\dfrac{\left(2x-x^2\right)'}{2\sqrt{2x-x^2}}=\dfrac{-x+1}{\sqrt{2x-x^2}}$, $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{-x+1}{\sqrt{2x-x^2}}=0\Leftrightarrow x=1(tm)$

Lập bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[0;2]$:

x	0		1		2
y'		+	0	−	
y	0	↗	1	↘	0

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\min_{[-1;1]} f(x)=f(0)=f(2)=0, \max_{[-1;1]} f(x)=f(1)=1$.

b) Với $x\in(1;+\infty)$ ta có:

Ta có: $y'=-1+\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0\forall x\in(1;+\infty)$

$\lim_{x\to1^+} y=\lim_{x\to1^+}\left(-x+\dfrac{1}{x-1}\right)=+\infty;\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+\dfrac{1}{x-1}\right)=-\infty$ Lập bảng biến thiên của hàm số trên $(1;+\infty)$:

x	1		$+\infty$
y'		−	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$

Vậy hàm số không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên $(1;+\infty)$.

II. CÁCH TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

Giả sử $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm trên $(a;b)$, có thể trừ ra tại một số hữu hạn điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm. Giả sử chỉ có hữu hạn điểm trong đoạn $[a;b]$ mà đạo hàm $f'(x)$ bằng 0.

Các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$:

①. Tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a;b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.

②. Tính $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a)$ và $f(b)$.

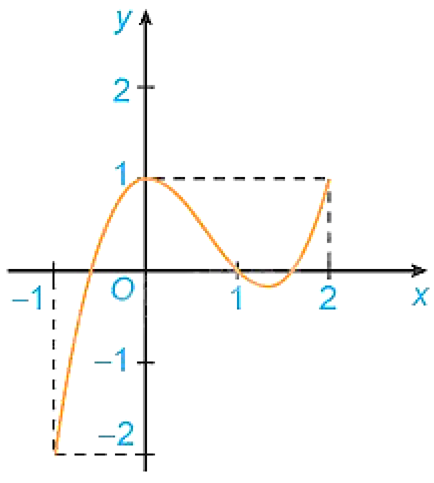
③. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên.

Ta có: $M = \max\limits_{[a;b]} f(x); m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Trả lời câu hỏi Hoạt động 2 trang 17 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ trên đoạn $[-1;2]$, với đồ thị như Hình 1.16.



Hình 1.16

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$.

b) Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm $x \in (-1;2)$ mà $f'(x) = 0$.

c) Tính giá trị của hàm số tại hai đầu mút của đoạn $[-1;2]$ và tại các điểm x đã tìm ở câu b. So sánh số nhỏ nhất trong các giá trị này với $\min_{[-1;2]} f(x)$, số lớn nhất trong các giá trị này với $\max_{[-1;2]} f(x)$.

Lời giải

a) Nhìn vào đồ thị ta thấy, trên đoạn $[-1;2]$ ta có:

Giá trị lớn nhất của hàm số là $\max_{[-1;2]} f(x) = f(0) = f(2) = 1$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{[-1;2]} f(x) = f(-1) = -2$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 4x,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

Vậy $x = 0, x = \dfrac{4}{3}$ thì $f'(x) = 0$.

c) Ta có: $f(0) = 1;\ f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \left(\dfrac{4}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + 1 = \dfrac{-5}{27};\ f(-1) = (-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 + 1 = -2$;

$$f(2) = 2^3 - 2.2^2 + 1 = 1$$

Do đó, số nhỏ nhất trong các giá trị này là -2 , số lớn nhất trong các giá trị này là 1 .
Ta thấy: $\max_{[-1;2]} f(x) = 1, \min_{[-1;2]} f(x) = -2$.

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0;4]$.

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2); y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \sqrt{2}$ (vì $x \in [0;4]$);

$$y(0) = 3; y(4) = 195; y(\sqrt{2}) = -1.$$

Do đó: $\max_{[0;4]} y = y(4) = 195; \min_{[0;4]} y = y(\sqrt{2}) = -1$.

Ví dụ 5: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$ trên đoạn $[0;2\pi]$.

Lời giải

Ta có: $y' = \cos x - \sin x; y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ hoặc $x = \dfrac{5\pi}{4}$ (vì $x \in [0;2\pi]$);

$$y(0) = 1; y(2\pi) = 1; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$

Do đó: $\max_{[0;2\pi]} y = y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; \min_{[0;2\pi]} y = y\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 2 trang 18 SGK Toán 12 Kết nối tri thức
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:
a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ trên đoạn $[0;2]$;
b) $y = (x+1)e^{-x}$ trên đoạn $[-1;1]$.

Lời giải

a) Ta có: $y' = 6x^2 - 6x + 5 = 6\left(x^2 - x + \frac{5}{6}\right) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} > 0 \forall x \in [0;2]$

Do đó, hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ đồng biến trên $[0;2]$.

Ta có: $y(0) = 2; y(2) = 2.2^3 - 3.2^2 + 5.2 + 2 = 16$

Do đó, $\max_{[0;2]} y = y(2) = 16, \min_{[0;2]} y = y(0) = 2$

b) Ta có: $y' = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = e^{-x}(1 - x - 1) = -x.e^{-x}$

$y' = 0 \Leftrightarrow -x.e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn $x \in [-1;1]$)

$y(-1) = 0; y(0) = 1; y(1) = \frac{2}{e}$ Do đó, $\max_{[-1;1]} y = y(0) = 1, \min_{[-1;1]} y = y(-1) = 0$

Trả lời câu hỏi Vận dụng SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2, 0 \le t \le 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần).

a) Hãy ước tính số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó.

b) Đạo hàm N'(t) biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). Hỏi virus sẽ lây lan nhanh nhất khi nào?

Lời giải

a) Với $0 \le t \le 12$ ta có:

$$N'(t) = -3t^2 + 24t, N'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 24t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0(tm) \\ t = 8(tm) \end{array}\right.$$

Ta có: $N(0) = 0, N(8) = -8^3 + 12.8^2 = 256, N(12) = -12^3 + 12.12^2 = 0$

Do đó, số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương là 256 người trong 12 tuần đầu.

b) Hàm số biểu thị tốc độ độ lây lan của virus là: $N'(t) = -3t^2 + 24t$

Đặt $f(t) = -3t^2 + 24t$, với $0 \le t \le 12$

Ta có: $f'(t) = -6t + 24, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4(\text{tm})$

$$f(0) = 0, f(4) = -3.4^2 + 24.4 = 48, f(12) = -3.12^2 + 24.12 = -144$$

Do đó, virus sẽ lây lan nhanh nhất khi $t = 4$ (tuần thứ 4).

III. GIẢI BÀI TẬP SGK

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = -x^2 + 4x + 3$;

b) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ trên $[0;+\infty)$;

c) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ treˆn $(1;+\infty)$;

d) $y = \sqrt{4x - 2x^2}$.

Lời giải

a) Ta có: $y = -x^2 + 4x + 3 = -(x-2)^2 + 7 \le 7$ với mọi số thực x.

Dấu "=" xảy ra khi $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Do đó, $\max f(x) = f(2) = 7$, hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

b) GTLN, GTNN của $y=x^3-2x^2+1$ trên $[0;+\infty)$

Ta có: $y'=3x^2-4x, y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(\text{tm}) \\ x=\dfrac{4}{3}(\text{tm}) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	↘	$\frac{-5}{27}$	↗	$+\infty$

Do đó, $\min_{[0;+\infty)} y = y\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{-5}{27}$, hàm số không có giá trị lớn nhất.

c) Ta có: $y'=\dfrac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+3)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

$$y'=0 \Leftrightarrow x=1+\sqrt{2} \text{ (do } x\in(1;+\infty)\text{)}$$

x	1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

Do đó, $\min_{(1;+\infty)} y = y\left(1+\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$, hàm số không có giá trị lớn nhất trên $(1;+\infty)$.

d) Tập xác định của hàm số là: $D=[0;2]$

$$y'=\frac{\left(4x-2x^2\right)'}{2\sqrt{4x-2x^2}}=\frac{4-4x}{2\sqrt{4x-2x^2}}=\frac{2(1-x)}{\sqrt{4x-2x^2}}$$

$$y'=0 \Leftrightarrow x=1(tm)$$

$$y(0)=0; y(1)=\sqrt{2}; y(2)=0$$

Do đó, $\max_{[0;2]} y = y(1) = \sqrt{2}, \min_{[0;2]} y = y(0) = y(2) = 0$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 2x^2 + 3$; b) $y = x \cdot e^{-x}$;

c) $y = x\ln x$; d) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

Lời giải

a) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

$$y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

$$y(0) = 3; y(1) = y(-1) = 2$$

Do đó, $\max_{(-\infty;+\infty)} y = y(0) = 3, \min_{(-\infty;+\infty)} y = y(1) = y(-1) = 2$

b) Ta có: $y' = e^{-x} - x \cdot e^{-x}, y' = 0 \Leftrightarrow e^{-x} - x \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Do đó, $\max\limits_{(-\infty;+\infty)} y = y(1) = \frac{1}{e}$, hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

c) Tập xác định của hàm số là: $D = (0;+\infty)$

$y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1, y' = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$ (thỏa mãn)

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
y'		−	0	+	
y	0	$\searrow$	$\frac{-1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số không có giá trị lớn nhất, $\min_{(0;+\infty)} y = y\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-1}{e}$

d) Tập xác định của hàm số là $[1;3]$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}, y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt{3-x}\sqrt{x-1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3-x} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow 3-x = x-1 \Leftrightarrow x = 2(tm)$$

$$y(1) = \sqrt{2}; y(2) = 2; y(3) = \sqrt{2}$$

Do đó, $\max_{[1;3]} y = y(2) = 2, \min_{[1;3]} y = y(1) = y(3) = \sqrt{2}$

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:
a) $y = 2x^3 - 6x + 3$ trên đoạn $[-1;2]$; b) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0;3]$;
c) $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $[0;\pi]$; d) $y = (x^2 - x)e^x$ trên đoạn $[0;1]$.

Lời giải

a) Ta có: $y' = 6x^2 - 6, y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ (thỏa mãn) $y(-1) = 7, y(1) = -1, y(2) = 7$
Do đó, $\max_{[-1;2]} y = y(2) = y(-1) = 7, \min_{[-1;2]} y = y(1) = -1$

b) Ta có: $y' = 4x^3 - 6x, y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (do $x \in [0;3]$)

$$y(0) = 2; y\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{-1}{4}; y(3) = 56$$

Do đó, $\max_{[0;3]} y = y(3) = 56, \min_{[0;3]} y = y\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{-1}{4}$

c) Ta có: $y' = 1 - 2\cos 2x, y' = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

Mà $x \in [0;\pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{5\pi}{6}$

$y(0) = 0; y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}; y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}; y(\pi) = \pi$ Do đó,

$\max_{[0;\pi]} y = y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \min_{[0;\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $y' = (2x-1)e^x + (x^2 - x)e^x = e^x(x^2 + x - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (do $x \in [0;1]$)

$y(0) = 0; y\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = (2-\sqrt{5})e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}; y(1) = 0$ Do đó,

$\max_{[0;1]} y = y(0) = y(1) = 0, \min_{[0;1]} y = y\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = (2-\sqrt{5})e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

Bài 4: Trong các hình chữ nhật có chu vi là 24 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Gọi chiều dài của hình chữ nhật là $x(\text{ cm}, 0<x<12)$

Chiều rộng của hình chữ nhật là $12-x(\text{ cm})$

Diện tích của hình chữ nhật là: $x(12-x)=-x^2+12x\left(\text{ cm}^2\right)$

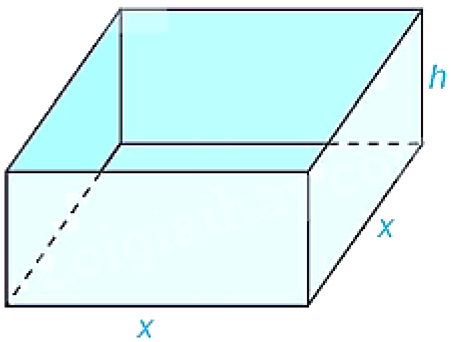
Đặt $S(x)=-x^2+12x, x\in(0;12)$

$S'(x)=-2x+12, S'(x)=0 \Leftrightarrow x=6(tm)$ Bảng biến thiên:

x	0		6		12
S'(x)		+	0	−	
S(x)	0	↗	36	↘	0

Do đó, trong các hình có cùng chu vi thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất là 36 cm^2.

Bài 5: Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như Hình 1.17. Tìm các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.



Hình 1.17

Lời giải

Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là x $(\text{ cm}, x>0)$ và chiều cao là h $(\text{ cm}, h>0)$

Diện tích bề mặt của hình hộp là 108 cm^2 nên $x^2+4xh=108 \Rightarrow h=\dfrac{108-x^2}{4x}(\text{ cm})$

Thể tích của hình hộp là: $V=x^2\cdot h=x^2\cdot\dfrac{108-x^2}{4x}=\dfrac{108x-x^3}{4}\left(\text{ cm}^3\right)$

Ta có: $V'=\dfrac{-3x^2+108}{4}, V'=0 \Leftrightarrow x=6$ (do $x>0$)

Bảng biến thiên:

x	0		6		$+\infty$
V'		+	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	108	$\searrow$	$-\infty$

Do đó, thể tích của hình hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy $x=6$ cm Khi đó, chiều cao của hình hộp là: $\frac{108-6^2}{4.6}=3(\text{ cm})$.

Bài 6: Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000 cm^3. Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá 1,2 nghìn đồng $/\text{cm}^2$, trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá 0,75 nghìn đồng/ cm^2. Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi bán kính đáy của bình là $x(\text{cm}, x>0)$

Chiều cao của bình là: $\frac{1000}{\pi \cdot x^2}(\text{ cm})$

Chi phí để sản xuất một chiếc bình là: $T(x)=2.1,2 \cdot \pi \cdot x^2+0,75 \cdot \frac{2000}{x}=2,4\pi \cdot x^2+\frac{1500}{x}$ (nghìn đồng) Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là thấp nhất thì $\mathrm{T}(\mathrm{x})$ là nhỏ nhất.

$T'(x)=4,8\pi x-\frac{1500}{x^2}, T'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$ (thỏa mãn)

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$		$+\infty$
T'(x)		$-$	0	+	
T(x)	$+\infty$	$\searrow$	$S\left(\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

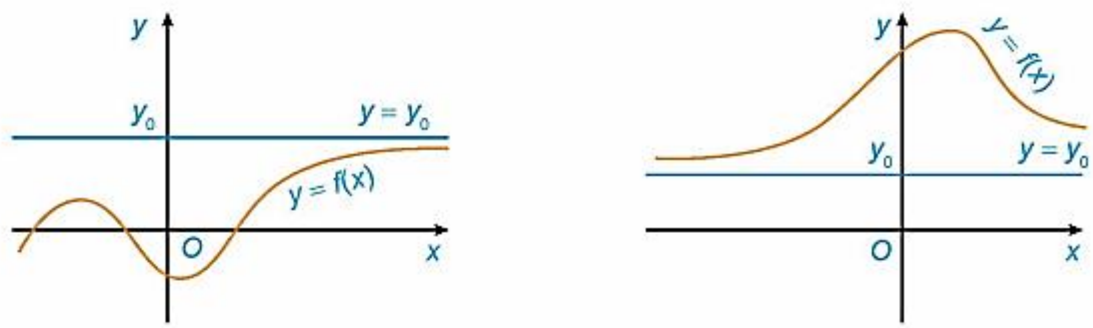
Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất thì bán kính đáy của bình là $\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$cm và chiều cao của bình là: $\frac{1000}{\pi \cdot\left(\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}\right)^2}(\text{ cm})$

Bài 3 – ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

Đường thẳng $y = y_0$ gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0 \text{ hoac } \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0.$$



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$).

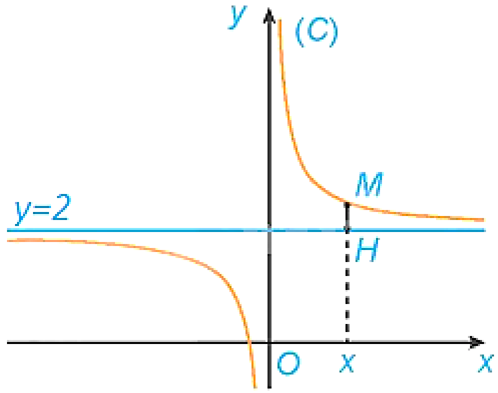
Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

Hình 1.20

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Trả lời câu hỏi Hoạt động 1 trang 20 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$ có đồ thị (C). Với $x > 0$, xét điểm $M(x; f(x))$ thuộc (C). Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng $y = 2$ (H.1.19).



Hình 1.19

a) Tính khoảng cách MH.
b) Có nhận xét gì về khoảng cách MH khi $x \to +\infty$?

Lời giải

a) Ta có: $M\left(x;\frac{2x+1}{x}\right);H(x;2)$.

Do đó, $MH=\sqrt{(x-x)^2+\left(2-\frac{2x+1}{x}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2x-2x-1}{x}\right)^2}=\frac{1}{x}$ (do $x>0$)

b) Ta có: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Do đó, khi $x\to+\infty$ thì $MH\to 0$.

Ví dụ 1: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)=\frac{3x-2}{x+1}$.

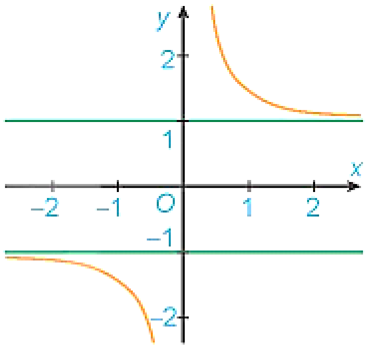
Lời giải

Ta có: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=3$. Tương tự, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=3$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=3$.

Ví dụ 2: Tìm các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Lời giải



Hình 1.21

Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = -1.$$

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có hai tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.

Nhận xét. Đồ thị hàm số $f(x)$ như Hình 1.21.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 1 trang 21 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$.

Phương pháp giải:

Sử dụng kiến thức về khái niệm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số để tìm tiệm cận ngang: Đường thẳng $y = y_0$ gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$.

Lời giải

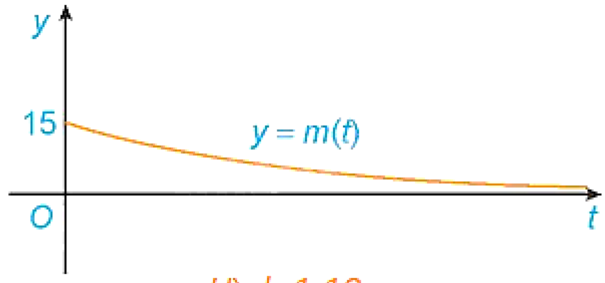
Ta có: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 2; \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 2$.

Do đó, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ là $y = 2$.

Trả lời câu hỏi Vận dụng 1 trang 21 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Giải bài toán trong tình huống mở đầu.

Giả sử khối lượng còn lại của một chất phóng xạ (gam) sau t ngày phân rã được cho bởi hàm số $m(t) = 15e^{-0{,}012t}$. Khối lượng $\mathrm{m}(\mathrm{t})$ thay đổi ra sao khi $t\to+\infty$? Điều này thể hiện trên Hình 1.18 như thế nào?



Hình 1.18

Phương pháp giải:
Sử dụng kiến thức về khái niệm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số để tìm tiệm cận ngang: Đường thẳng $y = y_0$ gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ nếu $\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right) = y_0$ hoặc $\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right) = y_0$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{t\to+\infty} m\left(t\right) = \lim_{t\to+\infty} 15e^{-0,012t} = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{15}{e^{0,012t}} = 0$

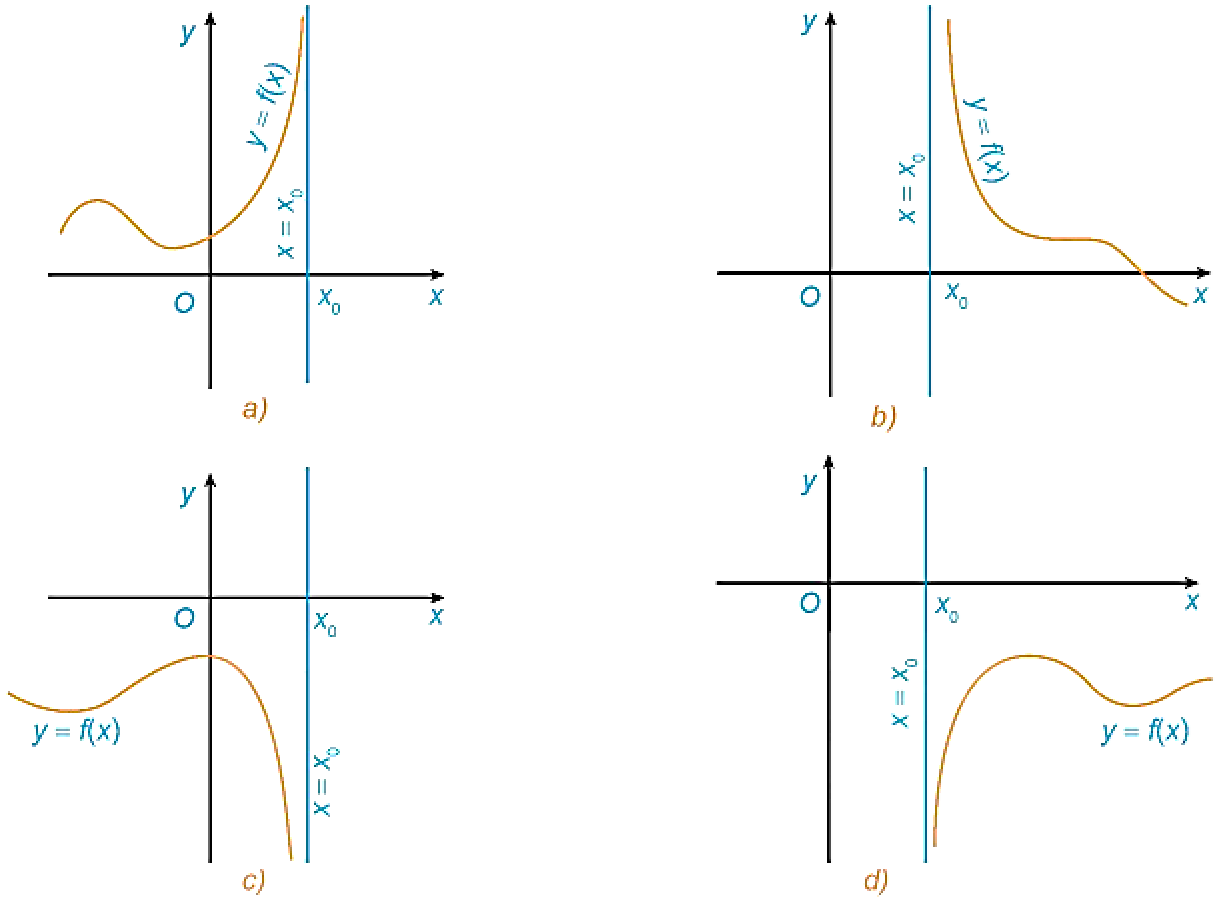
Do đó, $m\left(t\right) \to 0$ khi $t \to +\infty$.

Trong hình 1.18, khi $t \to +\infty$ thì $\mathrm{m}\left(\mathrm{t}\right)$ càng gần trục hoành Ot (nhưng không chạm trục Ot).

II. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐÚNG

Đường thẳng $x = x_0$ gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} f\left(x\right) = +\infty;\ \lim_{x\to x_0^-} f\left(x\right) = -\infty;\ \lim_{x\to x_0^+} f\left(x\right) = -\infty;\ \lim_{x\to x_0^-} f\left(x\right) = +\infty$$



a) và c). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0$).

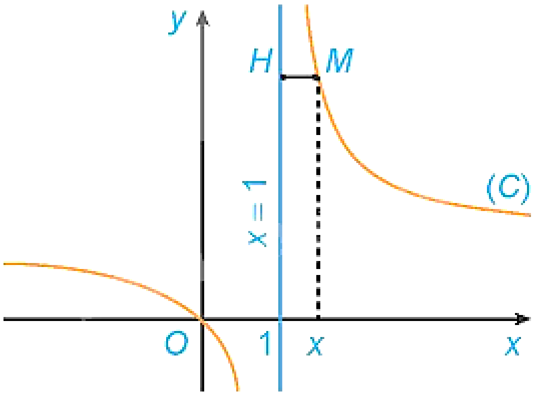
b) và d). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0^-$).

Hình 1.23

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

HĐ2

Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ có đồ thị (C). Với $x > 1$, xét điểm $M(x; f(x))$ thuộc (C). Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng $x = 1$ (H.1.22).



Hình 1.22

a) Tính khoảng cách MH.
b) Khi M thay đổi trên (C) sao cho khoảng cách MH dần đến 0, có nhận xét gì về tung độ của điểm M ?

Lời giải

a) Ta có: $M\left(x;\dfrac{x}{x-1}\right);H\left(1;\dfrac{x}{x-1}\right)$

Do đó, $MH=\sqrt{(1-x)^2+\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x}{x-1}\right)^2}=x-1$ (do $x>1$)

b) Khi khoảng cách MH dần đến 0 thì tung độ của điểm M dần ra xa vô tận về phía trên (tung độ điểm M tiến ra $+\infty$).

Ví dụ 3: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{3-x}{x+2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x\to -2^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to -2^+}\dfrac{3-x}{x+2}=+\infty$. Tương tự, $\lim_{x\to -2^-} f\left(x\right)=-\infty$. Vậy đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$.

Ví dụ 4: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{x^2+2}{x}$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+2}{x}=+\infty$. Tương tự, $\lim_{x\to 0^-} f\left(x\right)=-\infty$. Vậy đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 2 trang 22 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Tìm các tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{x-4}$.

Phương pháp giải:
Sử dụng kiến thức về khái niệm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số để tìm tiệm cận ngang: Đường

thẳng $y = y_0$ gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$.

Sử dụng kiến thức về khái niệm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số để tìm tiệm cận đứng: Đường thẳng $x = x_0$ gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$

Lời giải

Ta có: $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x}} = 2; \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x}} = 2$ nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$ là $y = 2$.

Lại có: $\lim_{x\to4^+} f(x) = \lim_{x\to4^+} \frac{2x+1}{x-4} = +\infty; \lim_{x\to4^-} f(x) = \lim_{x\to4^-} \frac{2x+1}{x-4} = -\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$ đường thẳng $x = 4$.

Trả lời câu hỏi Vận dụng 2 trang 22 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Để loại bỏ p% một loài tảo độc khỏi hồ nước, người ta ước tính chi phí bỏ ra là $C(p) = \frac{45p}{100-p}$ (triệu đồng), với $0 \le p < 100$. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ và nêu ý nghĩa của đường tiệm cận này.

Phương pháp giải:

Sử dụng kiến thức về khái niệm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số để tìm tiệm cận đứng: Đường thẳng $x = x_0$ gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$

Lời giải

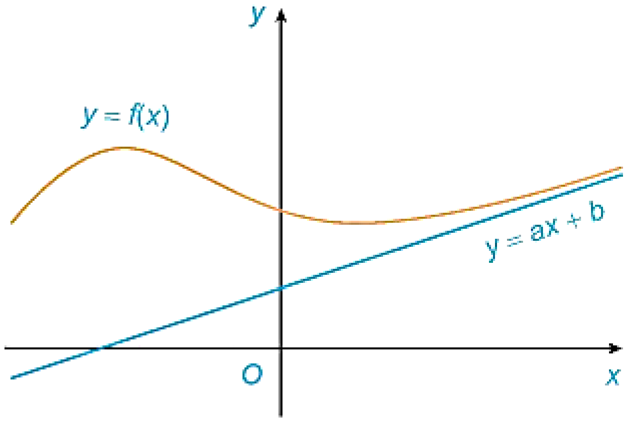
Ta có: $\lim_{p\to100^-} C(p) = \lim_{p\to100^-} \frac{45p}{100-p} = +\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ là $p = 100$.

Ý nghĩa của đường tiệm cận là: Không thể loại bỏ hết loài tảo độc ra khỏi hồ nước dù chi phí là bao nhiêu.

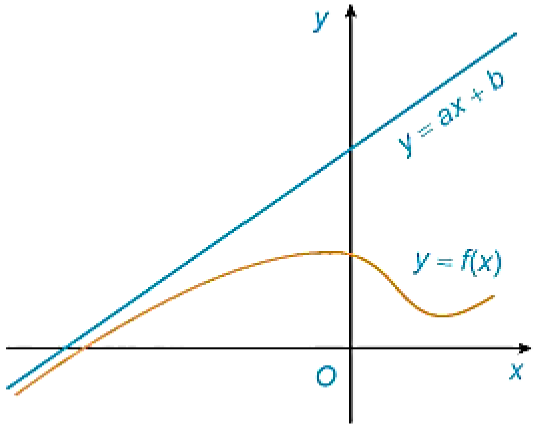
III. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

Đường thẳng $y = ax + b\,(a \ne 0)$ gọi là đường tiệm cận xiên (gọi tắt là tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right] = 0 \text{ hoac } \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right] = 0.$$



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$).



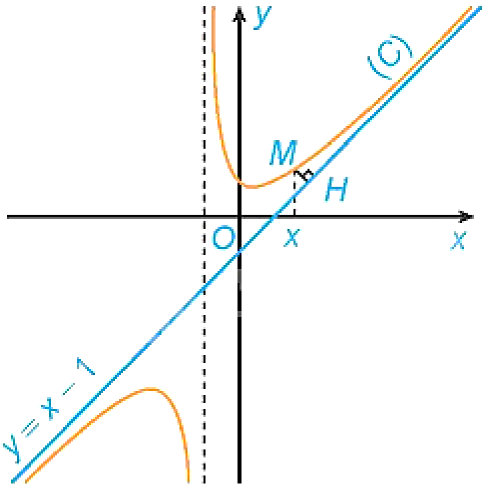
Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

Hình 1.25

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

HĐ3

Cho hàm số $y = f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $y = x - 1$ như Hình 1.24.



Hình 1.24

a) Với $x > -1$, xét điểm $M(x; f(x))$ thuộc (C). Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng $y = x - 1$. Có nhận xét gì về khoảng cách MH khi $x \to +\infty$?

b) Chứng tỏ rằng $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (x-1)\right] = 0$.

Tính chất này thể hiện trên Hình 1.24 như thế nào?

Phương pháp giải:
Sử dụng kiến thức về giới hạn của hàm số để tính giới hạn.

Lời giải

a) Nhìn vào đồ thị ta thấy, khi $x \to +\infty$ thì khoảng cách MH tiến tới 0 .

b) Ta có: $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-1+\dfrac{2}{x+1}-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=0$

Tính chất này được thể hiện trong Hình 1.24 là: Khoảng cách từ điểm M của đồ thị hàm số (C) đến đường thẳng $y=x-1$ tiến đến 0 khi $x\to+\infty$.

Vi dụ 5. Cho hàm số $y=f(x)=x+\dfrac{1}{x+2}$.

Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

Lời giải

Ta có: $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$. Tương tự $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=0$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x$.

Ví dụ 6: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$.

Lời giải

Ta có:

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^2+x}=1;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+2}{x+1}=-2.$$

(Tương tự, $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1, \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=-2$.)

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x-2$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 3 trang 24 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4x+2}{1-x}$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-4x+2}{1-x}=+\infty; \lim_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-4x+2}{1-x}=-\infty$

Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ là đường thẳng $x=1$

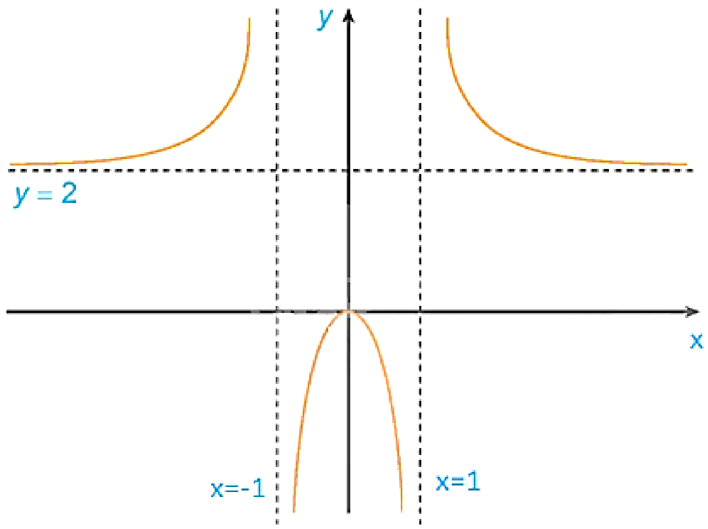
Ta có: $y=f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4x+2}{1-x}=-x+3-\dfrac{1}{1-x}$

Do đó, $\lim_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-\left(-x+3\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{1-x}=0, \lim_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-\left(-x+3\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{1-x}=0$

Vậy tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ là đường thẳng $y=-x+3$

IV. GIẢI BÀI TẬP SGK

Bài 1: Hình 1.26 là đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$



Hình 1.26

Sử dụng đồ thị này, hãy:

a) Viết kết quả của các giới hạn sau: $\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right); \lim_{x\to+\infty} f\left(x\right); \lim_{x\to 1^-} f\left(x\right); \lim_{x\to-1^+} f\left(x\right)$

b) Chỉ ra các tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

a) $\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=2; \lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=2; \lim_{x\to 1^-} f\left(x\right)=-\infty; \lim_{x\to-1^+} f\left(x\right)=-\infty$

b) Do đó, tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=1; x=-1$.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=2$

Bài 2: Đường thẳng $x=1$ có phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ không?

Lời giải

Ta có: $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+3)=4$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+3)=4$$

Do đó, đường thẳng $x=1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$.

Bài 3: Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{3-x}{2x+1}$; b) $y=\dfrac{2x^2+x-1}{x+2}$.

Lời giải

a) Vì $\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3-x}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{3}{x}-1}{2+\frac{1}{x}}=-\dfrac{1}{2}$; $\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3-x}{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{3}{x}-1}{2+\frac{1}{x}}=-\dfrac{1}{2}$

Do đó, đường thẳng $y=\dfrac{-1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3-x}{2x+1}$.

vì $\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} y=\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-}\dfrac{3-x}{2x+1}=-\infty$; $\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} y=\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}\dfrac{3-x}{2x+1}=+\infty$

Do đó, đường thẳng $x=\dfrac{-1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3-x}{2x+1}$.

b) vì $\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\left[x\dfrac{\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{2}{x}\right)}\right]=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\left[x\frac{\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{2}{x}\right)}\right]=+\infty$$

Do đó, đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+x-1}{x+2}$ không có tiệm cận ngang.

vì $\lim_{x\to-2^-} y=\lim_{x\to-2^-}\dfrac{2x^2+x-1}{x+2}=-\infty$; $\lim_{x\to-2^+} y=\lim_{x\to-2^+}\dfrac{2x^2+x-1}{x+2}=+\infty$

Do đó, đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+x-1}{x+2}$ có tiệm cận đứng là $x=-2$

Ta có: $y=\dfrac{2x^2+x-1}{x+2}=2x-3+\dfrac{5}{x+2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-3+\frac{5}{x+2}-(2x-3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x+2}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-3)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[2x-3+\frac{5}{x+2}-(2x-3)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x+2}=0$$

Do đó, đồ thị hàm số $y=\frac{2x^2+x-1}{x+2}$ có tiệm cận xiên là: $y=2x-3$.

Bài 4: Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x)=2x+50$ (triệu đồng). Khi đó, $f(x)=\frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $\mathrm{f}(x)$ giảm và $\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$.

Tính chất này nói lên điều gì?

Lời giải

Ta có: $f(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{2x+50}{x}$

Vì $f'(x)=\frac{-50}{x^2}<0$ với mọi số thực x nên hàm số $f(x)=\frac{C(x)}{x}$ giảm.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+50}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{50}{x}}{1}=2 \text{ (đpcm)}$$

Tính chất này nói lên: Khi sản xuất càng nhiều sản phẩm thì chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm càng giảm, nhưng không dưới 2.

Bài 5: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng $144m^2$. Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(m)$.

a) Viết biểu thức tính chu vi $\mathrm{P}(x)$ (mét) của mảnh vườn.

b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số P(x).

Lời giải

a) Độ dài cạnh còn lại của mảnh vườn là: $\frac{144}{x}(m)$

Chu vi của mảnh vườn là: $P(x)=2\left(x+\frac{144}{x}\right)=2x+\frac{288}{x}(m)$

b) Vì $\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\frac{288}{x}\right)=+\infty;\lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\frac{288}{x}\right)=-\infty$

Do đó, đồ thị hàm số $\mathrm{P}(x)$ không có tiệm cận ngang.

Vì $\lim_{x\to0^-}y=\lim_{x\to0^-}\left(2x+\frac{288}{x}\right)=-\infty;\lim_{x\to0^+}y=\lim_{x\to0^+}\left(2x+\frac{288}{x}\right)=+\infty$

Do đó, đồ thị hàm số $\mathrm{P}(x)$ có tiệm cận đứng là $x=0$.

Ta có: $\lim_{x\to+\infty}\left[P(x)-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\frac{288}{x}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{288}{x}=0$

Do đó, đồ thị hàm số $\mathrm{P}(\mathrm{x})$ có tiệm cận xiên là: $y=2x$.

Bài 4 – KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN

I. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. Tìm tập xác định của hàm số.

2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số:

Tính đạo hàm y'. Tìm các điểm tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.

Xét dấu y' để chỉ ra các khoảng đơn điệu của hàm số.

Tìm cực trị của hàm số.

Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).

Lập bảng biến thiên của hàm số.

3. Vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

Chú ý: Khi vẽ đồ thị, nên xác định thêm một số điểm đặc biệt của đồ thị, chẳng hạn tìm giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (khi có và việc tìm không quá phức tạp). Ngoài ra, cần lưu ý đến tính đối xứng của đồ thị (đối xứng tâm, đối xứng trục).

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Trả lời câu hỏi Hoạt động 1 trang 26 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Cho hàm số $y=x^2-4x+3$. Thực hiện lần lượt các yêu cầu sau:

a) Tính y' và tìm các điểm tại đó $y'=0$.

b) Xét dấu y' để tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến và cực trị của hàm số.

c) Tính $\lim_{x\to-\infty}y, \lim_{x\to+\infty}y$ và lập bảng biến thiên của hàm số.

d) Vẽ đồ thị của hàm số và nhận xét về tính đối xứng của đồ thị.

Lời giải

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=2x-4, y'=0\Leftrightarrow 2x-4=0\Leftrightarrow x=2$

Vậy với $x=2$ thì $y'=0$.

b) Trên khoảng $(-\infty;2)$, $y'<0$ nên hàm số nghịch biến. Trên khoảng $(2;+\infty)$, $y'>0$ nên hàm số đồng biến. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$, giá trị cực tiểu $y_{CT}=-1$. Hàm số không có cực đại.

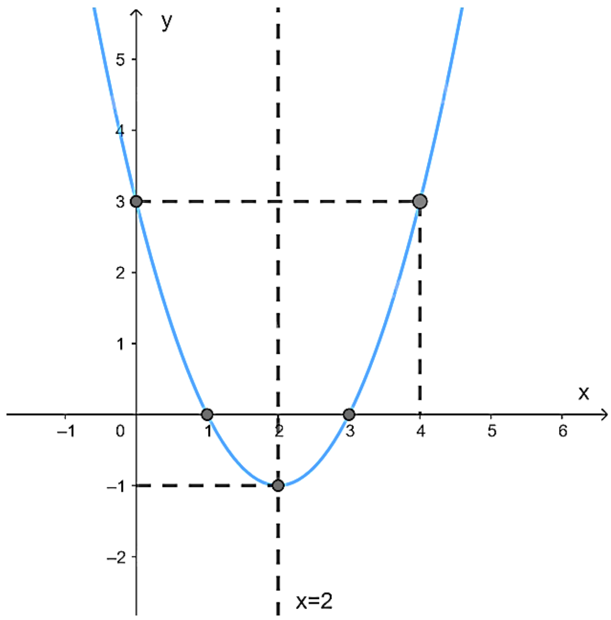
$$\text{c) } \lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(x^2-4x+3\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2-4x+3\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\right] = +\infty$$

Bảng biến thiên:

X	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
Y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

d) Đồ thị:



Giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$ với trục tung là $(0;3)$.

Ta có: $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right.$. Do đó, giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(3;0);(1;0)$.

Điểm $(4;3)$ thuộc đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$.

Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=2$ làm trục đối xứng.

d) Đồ thị:

Giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$ với trục tung là $(0;3)$.

Ta có: $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right.$. Do đó, giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm

$(3;0);(1;0)$.

Điểm $(4;3)$ thuộc đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$.

Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ làm trục đối xứng.

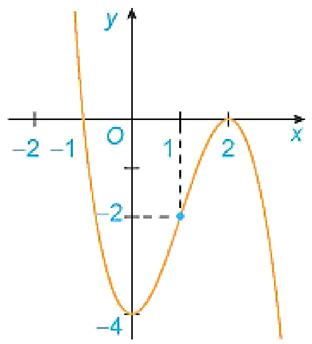
II. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỔ THỊ HÀM SỐ ĐATHỨC BẬC BA

Chú ý: Đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$:

Có tâm đối xứng là điểm có hoành độ thoả mãn $y'' = 0$,

hay $x = -\dfrac{b}{3a}$.

Không có tiệm cận.



Hình 1.28

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}$.

Sự biến thiên:

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x$. Vậy $y' = 0$ khi $x = 0$ hoặc $x = 2$.

Trên khoảng $(0;2)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến. Trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu $y_{CT} = -4$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, giá trị cực đại $y_{CD} = 0$.

Giới hạn tại vô cực:

$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(-1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x^3}\right) = +\infty; \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(-1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x^3}\right) = -\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị (H.1.28):

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0;-4)$.

Ta có $y=0 \Leftrightarrow -x^3+3x^2-4=0 \Leftrightarrow -(x-2)^2(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=2$. Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(-1;0)$ và $(2;0)$.

Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $(1;-2)$.

Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=x^3-2x^2+2x-1$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}$.

Sự biến thiên:

Ta có: $y'=3x^2-4x+2$. Vậy $y'>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

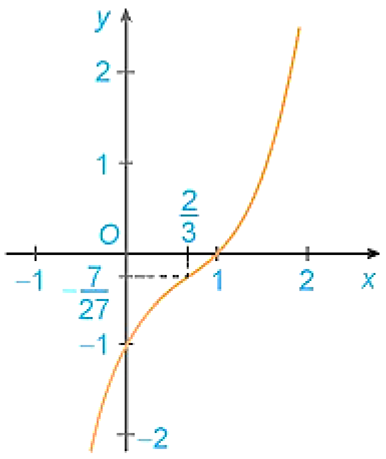
Giới hạn tại vô cực: $\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$;

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=+\infty$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị (H.1.29):



Hình 1.29

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0;-1)$.

Ta có $y=0 \Leftrightarrow x^3-2x^2+2x-1=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-x+1)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(1;0)$.

Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $\left(\frac{2}{3};-\frac{7}{27}\right)$.

Luyện tập 1 trang 28 Toán 12 Tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=-2x^3+3x^2\ -5x$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là R.

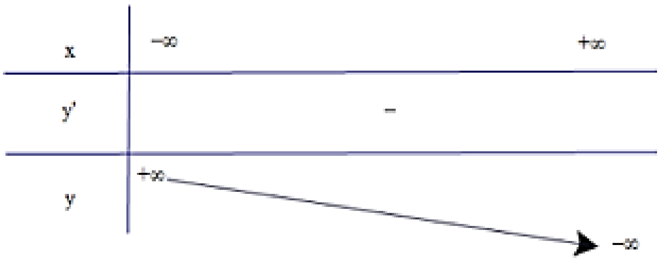
Sự biến thiên:

Ta có: $y'=-6x^2+6x-5=-6\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Giới hạn tại vô cực: $\lim_{x\to-\infty}(-2x^3+3x^2-5x)=+\infty;\lim_{x\to+\infty}(-2x^3+3x^2-5x)=-\infty$ - Bảng biến thiên

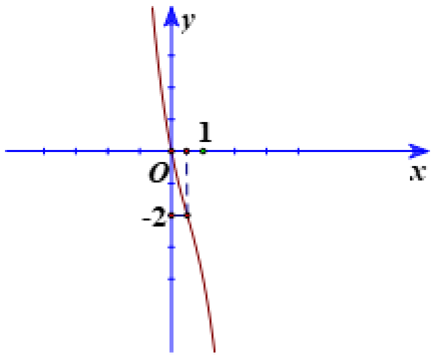


Đồ thị

Ta có $y=0 \Leftrightarrow -2x^3+3x^2-5x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Đồ thị hàm số giao với trục hoành và trục tung tại $(0;0)$.

Đồ thị có tâm đối xứng là $\left(\frac{1}{2};-2\right)$



III. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ PHÂN THỨC HỮU TỈ

a) Hàm số phân thức $y=\frac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0, ad-bc\neq 0\right)$

Chú ý: Đồ thị của hàm số phân thức $y=\frac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0, ad-bc\neq 0\right)$:

Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;

Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

b) Hàm số phân thức $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}(a\neq 0, p\neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu]

Chú ý: Đồ thị của hàm số phân thức $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}(a\neq 0, p\neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu):

Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;

Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Ví dụ 3: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Sự biến thiên:

Ta có: $y'=-\dfrac{3}{(x-2)^2}<0$ với mọi $x\neq 2$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Tiệm cận: $\lim_{x\to 2^-} y=\lim_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x-2}=-\infty; \lim_{x\to 2^+} y=\lim_{x\to 2^+}\dfrac{x+1}{x-2}=+\infty$;

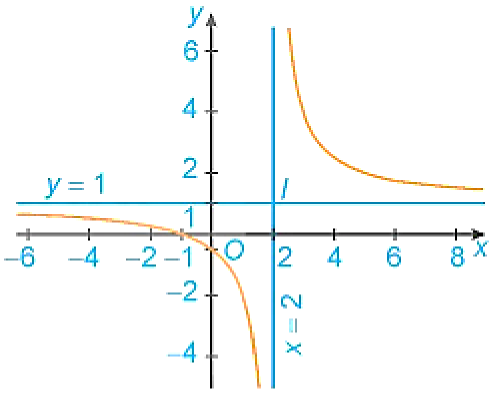
$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-2}=1;\ \lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-2}=1$$

Do đó, đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	1 ↘		$-\infty$ || $+\infty$		↘ 1

Đồ thị (H.1.30):



Hình 1.30

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1;0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2;1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.

Luyện tập 2 trang 29 Toán 12 Tập 1: Giải bài toán ở tình huống mở đầu, coi f(x) là hàm số xác định với $x \ge 1$.

Lời giải

Có $f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x+45}{x}$

Có $f'(x) = \frac{-45}{x^2} < 0, \forall x \ge 1$ nên hàm số $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ là hàm số giảm.

Có $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+45}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{45}{x}}{1} = 2$

Do đó chi phí trung bình giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 2 triệu đồng/sản phẩm.

Điều này được thể hiện trong Hình 1.27 là đồ thị hàm số $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$ và đi xuống trong khoảng $(0;+\infty)$.

Vận dụng trang 29 Toán 12 Tập 1: Một bể chứa ban đầu có 200 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 40 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan).

a) Tính thể tích nước và khối lượng chất khử trùng có trong bể sau t phút. Từ đó tính nồng độ chất khử trùng (gam/lít) trong bể sau t phút.

b) Coi nồng độ chất khử trùng là hàm số $f(t)$ với $t^3 0$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.

c) Hãy giải thích tại sao nồng độ chất khử trùng tăng theo y nhưng không vượt ngưỡng 0,5 gam/lít.

Lời giải

a) Thể tích nước có trong bể sau t phút là: $V(t) = 200 + 40t$ (lít).

Khối lượng chất khử trùng có trong bể sau t phút là: $M(t) = 20t(\text{gam})$.

Nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút là: $\frac{20t}{200+40t}$ (gam/lit).

b) $y = f(t) = \frac{20t}{200+40t} (t \ge 0)$.

Tập xác định của hàm số là $D=[0;+\infty)$.

Sự biến thiên

Ta có $y'=\dfrac{20(200+40t)-20t.40}{(200+40t)^2}=\dfrac{4000}{(200+40t)^2}>0$ với mọi $t\in D$.

Hàm số luôn đồng biến trên D.

Hàm số không có cực trị.

Tiệm cận:

$\lim_{t\to+\infty}\dfrac{20t}{200+40t}=\dfrac{1}{2}$. Do đó $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (phần bên phải trục Oy).

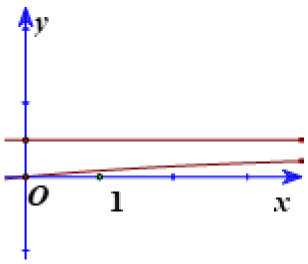
$$\lim_{t\to0^+}\dfrac{20t}{200+40t}=0$$

Bảng biến thiên

t	0		$+\infty$
y'		+	
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

Đồ thị.

Hàm số đi qua điểm (0; 0); $\left(1;\dfrac{1}{12}\right);\left(2;\dfrac{1}{7}\right)$.



c) Vì $y'=\dfrac{4000}{(200+40t)^2}>0,\forall t\ge0$ và $\lim_{t\to+\infty}\dfrac{20t}{200+40t}=\dfrac{1}{2}$ nên nồng độ chất khử trùng tăng theo y nhưng không vượt ngưỡng 0,5 gam/lít.

Ví dụ 4: Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Sự biến thiên: Viết $y=x+1+\dfrac{1}{x-2}$.

Ta có: $y'=1-\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$. Vậy $y'=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=3$.

Trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$, $y'>0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này. Trên các khoảng $(1;2)$ và $(2;3)$, $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng này.

Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ với $y_{C\oplus}=1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ với $y_{CT}=5$.

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-1}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=-\infty;\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-1}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=+\infty$$

.

Tiệm cận: $\lim_{x\to2^-}y=\lim_{x\to2^-}\left(x+1+\dfrac{1}{x-2}\right)=-\infty;\lim_{x\to2^+}y=\lim_{x\to2^+}\left(x+1+\dfrac{1}{x-2}\right)=+\infty$;

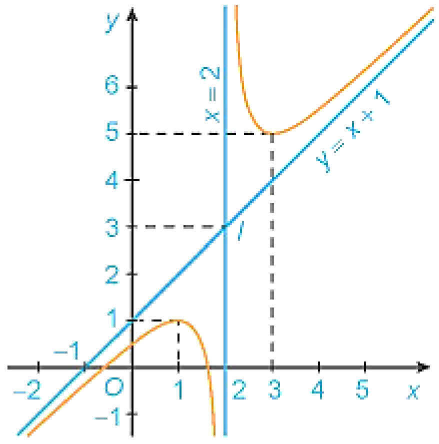
$$\lim_{x\to+\infty}\left[y-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=0;\ \lim_{x\to-\infty}\left[y-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-2}=0$$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị (H.1.31):



Hình 1.31

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Ta có $y=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-1}{x-2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)$ và $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2;3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

Ví dụ 5: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\frac{x^2+x-2}{x+1}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Sự biến thiên:

Viết $y=x-\frac{2}{x+1}$, ta có $y'=1+\frac{2}{(x+1)^2}>0$ với mọi $x\neq -1$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-2}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=-\infty;\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-2}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=+\infty$$
.

Tiệm cận: $\lim_{x\to-1^-} y=\lim_{x\to-1^-}\left(x-\frac{2}{x+1}\right)=+\infty;\lim_{x\to-1^+} y=\lim_{x\to-1^+}\left(x-\frac{2}{x+1}\right)=-\infty$;

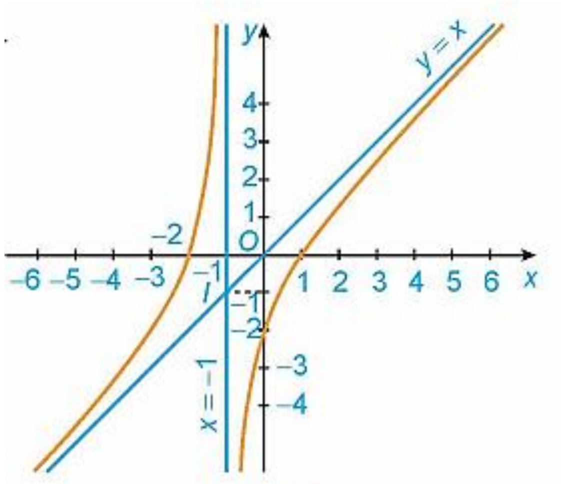
$$\lim_{x\to+\infty}[y-x]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x+1}\right)=0;\ \lim_{x\to-\infty}[y-x]=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{x+1}\right)=0$$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

Đồ thị (H.1.32):



Hình 1.32

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0;-2)$.

Ta có $y=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2+x-2}{x+1}=0\Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=1$. Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(-2;0)$ và $(1;0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

Luyện tập 3 trang 32 Toán 12 Tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-1}{x-2}$

Lời giải

Tập xác định của hàm số là R\{2}.

Sự biến thiên:

Có $y=\dfrac{-x^2+3x-1}{x-2}=-x+1+\dfrac{1}{x-2}$

$y'=-1-\dfrac{1}{(x-2)^2}<0$ với mọi $x\neq 2$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+3x-1}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+3x-1}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=-\infty$$

Tiệm cận

$$\lim_{x\to2^-}y=\lim_{x\to2^-}\frac{-x^2+3x-1}{x-2}=-\infty;\lim_{x\to2^+}y=\lim_{x\to2^+}\frac{-x^2+3x-1}{x-2}=+\infty$$

Do đó $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[y-(-x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=0;\lim_{x\to-\infty}\left[y-(-x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-2}=0$$

Do đó $y=-x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

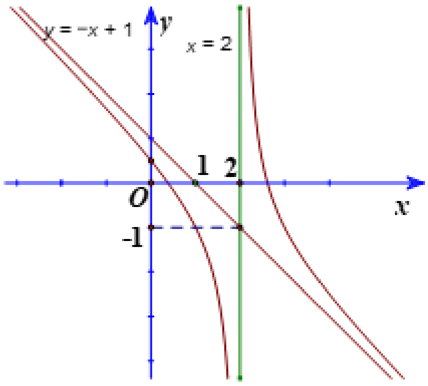
x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		-	||	-	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};0\right);\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};0\right)$

Đồ thị hàm số nhận giao điểm I(2; -1) của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



IV. GIẢI BÀI TẬP SGK

Bài 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y=-x^3+3x+1$; b) $y=x^3+3x^2-x-1$.

Lời giải

a) $y=-x^3+3x+1$

Tập xác định của hàm số là R.

Sự biến thiên

$y'=-3x^2+3; y'=0 \Leftrightarrow -3x^2+3=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặ $x=-1$.

Trên khoảng (-1; 1), y' >0 nên hàm số đồng biến.

Trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$, y' < 0 nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$, giá trị cực tiểu $y_{CT}=-1$. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$, giá trị cực đại $y_{CE}=3$.

Giới hạn tại vô cực: $\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3+3x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}-x^3\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$;

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3+3x+1\right)=\lim_{x\to-\infty}-x^3\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=+\infty$$

Bảng biến thiên

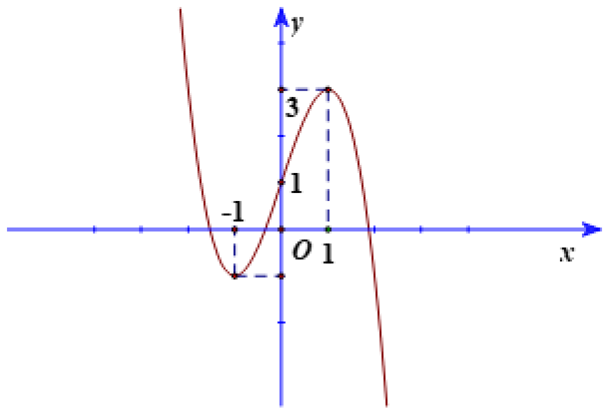
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;1)$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1;-1)$; $(1;3)$.

Đồ thị có tâm đối xứng là $(0;1)$.



b) $y = x^3 + 3x^2 - x - 1$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Sự biến thiên

$y' = 3x^2 + 6x - 1; y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}$ hoặc $x = \dfrac{-3-2\sqrt{3}}{3}$.

Trên khoảng $\left(\dfrac{-3-2\sqrt{3}}{3}; \dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}\right)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến.

Trên các khoảng $\left(-\infty; \dfrac{-3-2\sqrt{3}}{3}\right)$ và $\left(\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$, y' > 0 nên hàm số đồng biến trên các khoảng đó.

Hàm số đạt cực đại tại $x = \dfrac{-3-2\sqrt{3}}{3}$ và đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}$.

Giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3 + 3x^2 - x - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3 + 3x^2 - x - 1\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = -\infty$$

Bảng biến thiên

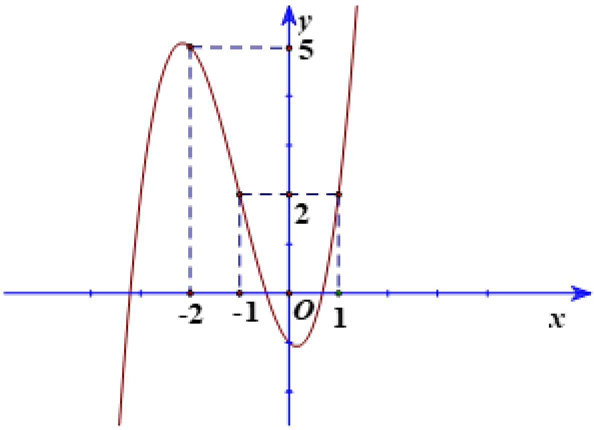
x	$-\infty$		$\frac{-3-2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$y_{CĐ}$	↘	y_{CT}	↗	$+\infty$

Đồ thị

Đồ thị hàm số giao Oy tại $(0;-1)$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-2;5);(1;2)$.

Đồ thị có tâm đối xứng là $(-1;2)$.



Bài 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$; b) $y=\dfrac{x+3}{1-x}$.

Lời giải

a) $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Sự biến thiên

Có $y'=\dfrac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$ với mọi x $\neq -1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Tiệm cận

$$\lim_{x\to(-1)^-} y=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{2x+1}{x+1}=+\infty;\lim_{x\to(-1)^+} y=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{2x+1}{x+1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=2;\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=2$$

Do đó $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

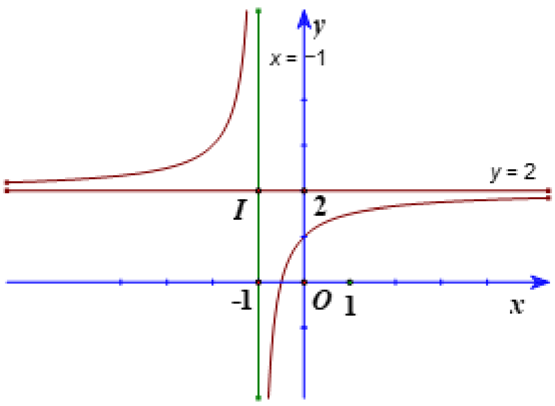
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	2 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$		↗ 2

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;1)$ và giao với trục hoành tại điểm $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $(-1;2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này là trục đối xứng.



b) $y=\frac{x+3}{1-x}$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Sự biến thiên

$$y'=\frac{(1-x)+(x+3)}{(1-x)^2}=\frac{4}{(1-x)^2}>0 \text{ với mọi } x\neq 1.$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Tiệm cận

$$\lim_{x\to 1^+} y = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+3}{1-x} = -\infty; \lim_{x\to 1^-} y = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+3}{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-1} = -1; \lim_{x\to -\infty} y = \lim_{x\to -\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-1} = -1$$

Do đó $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

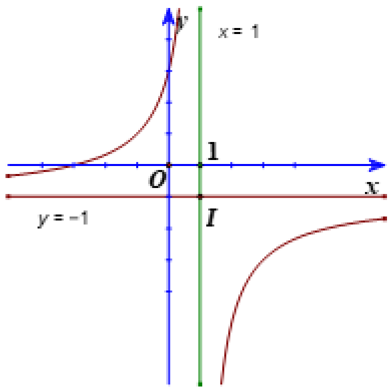
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	-1	$\nearrow$ $+\infty$	||	$-\infty$ $\nearrow$	-1

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0;3)$, giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-3;0)$.

Đồ thị của hàm số nhận giao điểm I(1; -1) của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



Bài 3: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x^2 - x + 4}{x-1}$; b) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x+3}$.

Lời giải

a) $y = \dfrac{2x^2 - x + 4}{x-1}$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sự biến thiên

Có $y=\dfrac{2x^2-x+4}{x-1}=2x+1+\dfrac{5}{x-1}$

Có $y'=2-\dfrac{5}{(x-1)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow 2-\dfrac{5}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2-\sqrt{10}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$.

Trên các khoảng $\left(-\infty;\dfrac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{2+\sqrt{10}}{2};+\infty\right)$, có $y'>0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này.

Trên các khoảng $\left(\dfrac{2-\sqrt{10}}{2};1\right)$ và $\left(1;\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}\right)$, có $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Hàm số đạt cực cực đại tại $x=\dfrac{2-\sqrt{10}}{2}$ và đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$.

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+4}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x+4}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=+\infty$$

Tiệm cận

$$\lim_{x\to1^+}y=\lim_{x\to1^+}\frac{2x^2-x+4}{x-1}=+\infty;\lim_{x\to1^-}y=\lim_{x\to1^-}\frac{2x^2-x+4}{x-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[y-(2x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x-1}=0;\lim_{x\to-\infty}\left[y-(2x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x-1}=0$$

Do đó $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=2x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

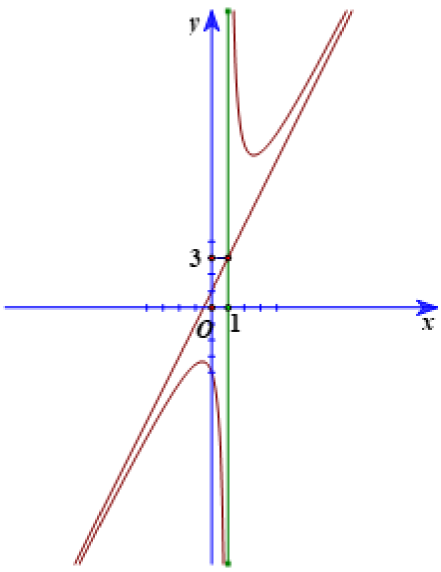
x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{10}}{2}$		1		$\frac{2+\sqrt{10}}{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−	||	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$-2\sqrt{10}+3$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$2\sqrt{10}+3$	↗	$+\infty$

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là (0; -4).

Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm I $(1;3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



b) $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

Sự biến thiên

Có $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+3}=x-1+\dfrac{4}{x+3}$

Có $y'=1-\dfrac{4}{(x+3)^2}; y'=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{4}{(x+3)^2}=0\Leftrightarrow (x+3)^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=-5\end{array}\right.$

Trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(-1;+\infty)$, y' > 0 nên hàm số đồng biến trên các khoảng này.

Trên các khoảng $(-5;-3)$ và $(-3;-1)$, $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng này.

Hàm số đạt cực đại tại $\mathrm{x}=-5$ với $\mathrm{y}_{\mathrm{CD}}=-8$; hàm số đạt cực tiểu tại $\mathrm{x}=-1$ với $\mathrm{y}_{\mathrm{CT}}=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+1}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=-\infty$$

Tiệm cận

$$\lim_{x\to(-3)^+} y=\lim_{x\to(-3)^+}\frac{x^2+2x+1}{x+3}=+\infty;\lim_{x\to(-3)^-} y=\lim_{x\to(-3)^-}\frac{x^2+2x+1}{x+3}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[y-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x+3}=0;\lim_{x\to-\infty}\left[y-(x-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x+3}=0$$

Do đó $x=-3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=x-1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

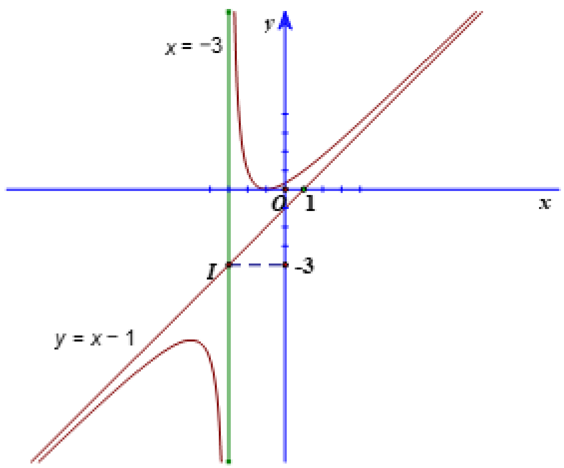
x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
y'		+	0	−	||	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-8	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $\left(0;\frac{1}{3}\right)$

Giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-1;0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm I(-3; -4) của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



Bài 4: Một cốc chứa 30ml dung dịch KOH (potassium hydroxide) với nồng độ $100\text{mg}/\text{ml}$. Một bình chứa dung dịch KOH khác với nồng độ $8\text{mg}/\text{ml}$ được trộn vào cốc.

a) Tính nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn $x(\text{ml})$ từ bình chứa, kí hiệu là $C(x)$.

b) Coi $C(x)$ là hàm số xác định với $x^{3}0$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số này.

c) Giải thích tại sao nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn $8\text{mg}/\text{ml}$.

Lời giải

a) Tổng khối lượng KOH sau khi trộn là: 30.100 + 8.x = 3000 + 8x (mg).

Tổng thể tích dung dịch sau khi trộn là: 30 +x (ml).

Nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn là $C(x)=\dfrac{3000+8x}{30+x}(\text{mg}/\text{ml})$.

b) $C(x)=\dfrac{3000+8x}{30+x}, x\geq 0$

Tập xác định của hàm số là $D=[0;+\infty)$.

Sự biến thiên

Có $C'(x)=\dfrac{8(30+x)-(3000+8x)}{(30+x)^2}=\dfrac{-2760}{(30+x)^2}<0$ với mọi x $^{3}0$.

Hàm số luôn nghịch biến trên $[0;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Tiệm cận

$$\lim_{x\to+\infty}C(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3000+8x}{30+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3000}{x}+8}{\frac{30}{x}+1}=8$$

Do đó $y=8$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (phần bên phải trục Oy).

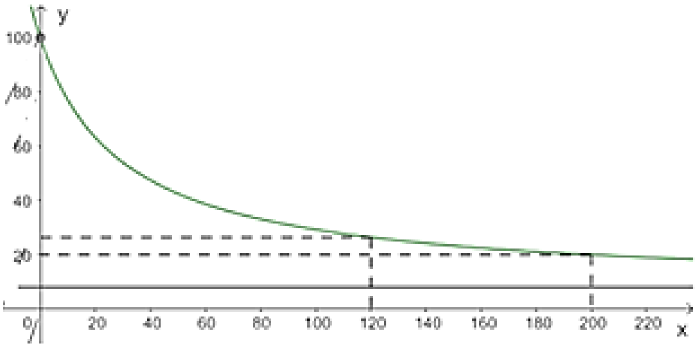
Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
C'(x)		–	
C(x)	100	↘	8

Đồ thị

Hàm số giao với trục Oy tại điểm (0; 100).

Hàm số đi qua điểm $\left(120;\frac{132}{5}\right);(200;20)$.



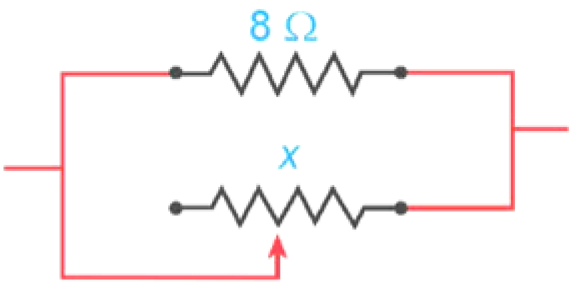
c) Vì $C'(x)=\frac{-2760}{(30+x)^2}<0,\forall x\ge 0$ và $\lim_{x\to+\infty}C(x)=8$ nên nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn $8\text{mg}/\text{ml}$.

Bài 5: Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở R1 và R2 thì điện trở tương đương R của mạch điện được tính theo công thức $R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

Giả sử một điện trở 8 W được mắc song song với một biến trở như Hình 1.33. Nếu điện trở đó được kí hiệu $x(W)$ thì điện trở tương đương R là hàm số của x. Vẽ đồ thị của hàm số $y=R(x),x>0$ và dựa vào đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

a) Điện trở tương đương của mạch thay đối thế nào khi x tăng.

b) Tại sao điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá 8 W.



Hình 1.33

Lời giải

Ta có $y=R(x)=\frac{8x}{8+x},x>0$

Tập xác định $\text{D}=(0;+\infty)$.

Sự biến thiên

Có $y' = \dfrac{8(8+x)-8x}{(8+x)^2} = \dfrac{64}{(8+x)^2} > 0, \forall x > 0$

Hàm số luôn đồng biến trên (0; +∞).

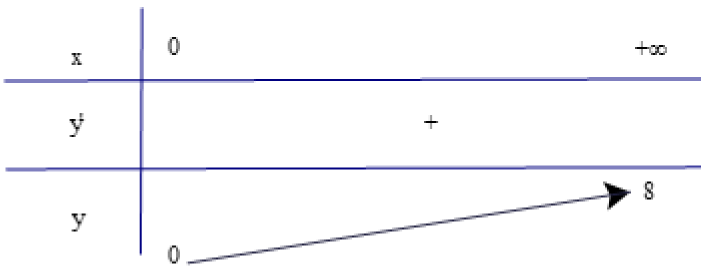
Hàm số không có cực trị.

Tiệm cận

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{8}{\dfrac{8}{x}+1} = 8$$

Vậy $y = 8$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (phần bên phải trục Oy).

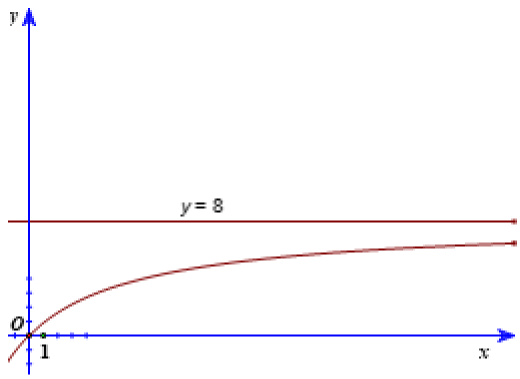
Bảng biến thiên



Đồ thị

Đồ thị hàm số giao với Ox, Oy tại $(0;0)$.

Đồ thị hàm số đi qua $\left(1;\dfrac{8}{9}\right);\left(2;\dfrac{8}{5}\right)$



a) Vì $y' = \dfrac{64}{(8+x)^2} > 0, \forall x > 0$ nên khi x tăng thì điện trở tương đương của mạch cũng tăng.

b) Vì $y' = \dfrac{64}{(8+x)^2} > 0, \forall x > 0$ và $\lim_{x\to+\infty} y = 8$ nên điện trở tương đương của mạch không bao giờ

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

Bài 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a; b). Phát biểu nào dưới đây là đúng?

A. Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi x thuộc (a; b) thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên (a; b).

B. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc (a; b) thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên (a; b).

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên (a; b) khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0$ với mọi x thuộc (a; b).

D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên (a; b) khi và chỉ khi $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc (a; b).

Lời giải

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a; b). Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc (a; b) thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trền (a; b).

Chọn B

Bài 2: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = -x^3 + 3x^2 - 9x$; **B.** $y = -x^3 + x + 1$; **C.** $y = \dfrac{x-1}{x-2}$; **D.** $y = 2x^2 + 3x + 2$.

Lời giải

Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 9x$ có:

$$y' = -3x^2 + 6x - 9 = -3\left(x^2 - 2x + 1\right) - 6 = -3(x-1)^2 - 6 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó, hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 9x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chon **A**

Bài 3: Hàm số nào dưới đây không có cực trị?

A. $y = |x|$. **B.** $y = x^4$. **C.** $y = -x^3 + x$. **D.** $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải

Sử dụng kiến thức về định lí cực trị hàm số để tìm hàm không có cực trị: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó:

Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a;x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0;b)$ thì điểm x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì điểm x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Bài 4: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=(x-2)^2\cdot e^x$ trên đoạn [1; 3] là:

A. 0. **B.** e^3. **C.** e^4. **D.** e.

Lời giải

Ta có: $y'=2(x-2)e^x+e^x(x-2)^2, y'=0\Leftrightarrow 2(x-2)e^x+e^x(x-2)^2=0$

$\Leftrightarrow e^x(2+x-2)(x-2)=0\Leftrightarrow x.e^x(x-2)\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$

$$y(0)=4; y(1)=e; y(3)=e^3, y(2)=0$$

Do đó, giá trị lớn nhất của hàm số $y=(x-2)^2 .\ e^x$ trên đoạn [1; 3] là e^3.

Chọn B

Bài 5: Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn: $\lim_{x\to 2^+} f(x)=1; \lim_{x\to 2^-} f(x)=1; \lim_{x\to -\infty} f(x)=2$ và $\lim_{x\to +\infty} f(x)=2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
B. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
C. Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
D. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Lời giải

vì $\lim_{x\to -\infty} f(x)=2, \lim_{x\to +\infty} f(x)=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số, vì $\lim_{x\to 2^+} f(x)=1; \lim_{x\to 2^-} f(x)=1$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận đứng.

Chọn B

Bài 6: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x+2}$ là

A. $y=-2$. **B.** $y=1$. **C.** $y=x+2$. **D.** $y=x$.

Lời giải

Ta có: $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x+2}=x-\dfrac{2}{x+2}$

Lại có: $\lim_{x\to +\infty}(y-x)=\lim_{x\to +\infty}\left[x-\dfrac{2}{x+2}-x\right]=\lim_{x\to +\infty}-\dfrac{2}{x+2}=0$

$$\lim_{x\to -\infty}(y-x)=\lim_{x\to -\infty}\left[x-\frac{2}{x+2}-x\right]=\lim_{x\to -\infty}-\frac{2}{x+2}=0$$

Do đó, đường thẳng $y=x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-2}{x+2}$.

Chọn D

Bài 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên

$$\mathbb{R}\setminus\{1;3\}$$

liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1 || 7	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$ || -4	$\nearrow$	-1

Khẳng định nào sau đây là sai?

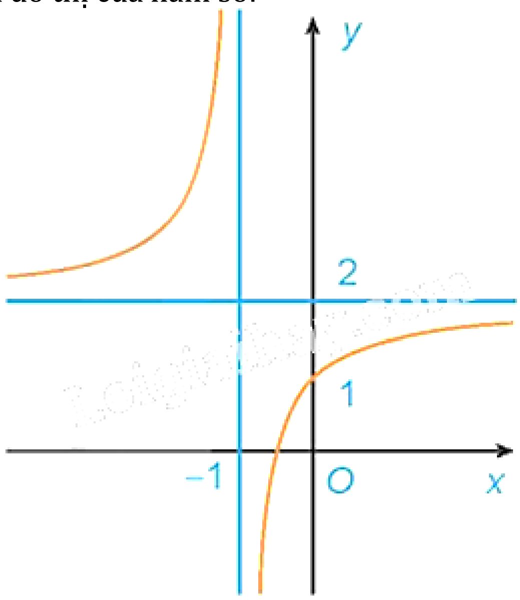
A. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.
B. Đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.
C. Đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.
D. Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

Vì $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1; \lim_{x\to 1^+} f(x) = 7$ nên đường thẳng $x = 1$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Chọn D

Bài 8: Đồ thị trong Hình 1.37 là đồ thị của hàm số:



Hình 1.37

A. $y = \dfrac{x+2}{x+1}$.   **B.** $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.   **C.** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.   **D.** $y = \dfrac{x+3}{1-x}$.

Lời giải

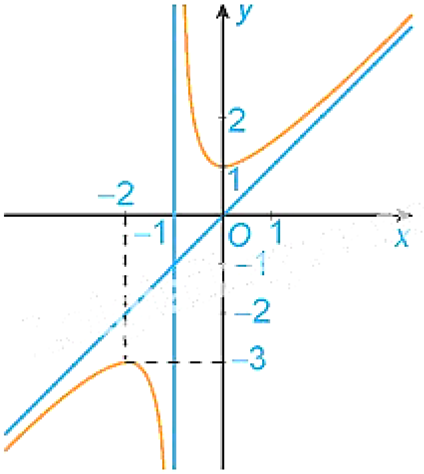
Đồ thị hàm số trong hình 1.37 có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Xét hàm số: $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=2$ nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có tiệm cận ngang là $y=2$.

Đường thẳng $y=2$ không là tiệm cận ngang của các đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1};y=\dfrac{x+3}{1-x};y=\dfrac{x+2}{x+1}$.

Chọn B

Bài 9: Đồ thị trong Hình 1.38 là đồ thị của hàm số:



Hình 1.38

A. $y=x-\dfrac{1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

Lời giải

Đồ thị hàm số trong hình 1.38 có dạng: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}\left(a\neq 0,p\neq 0\right)$ và đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu. Do đó, loại đáp án **B.**

Đồ thị hàm số trong hình 1.38 đi qua điểm

$$\left(-2;-3\right)$$

Do đó, loại đáp án **C.**

Đồ thị hàm số trong hình 1.38 đi qua điểm (0; 1). Do đó, loại đáp án **A.**

Hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=x+\dfrac{1}{x+1}$ có:

$+\lim_{x\to-1^+}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=+\infty;\lim_{x\to-1^-}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=-\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\frac{1}{x+1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0,$$

$\lim_{x\to-\infty}(y-x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\dfrac{1}{x+1}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$ nên đường thẳng $y=x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Chọn D

Bài 10: Xét chiều biến thiên và tìm các cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y=x^3-3x^2+3x-1$; b) $y=x^4-2x^2-1$;

c) $y=\dfrac{2x-1}{3x+1}$ d) $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-6x+3=3(x-1)^2, y'=0\Leftrightarrow x=1$

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=x^3-3x^2+3x-1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số $y=x^3-3x^2+3x-1$ không có cực trị.

b) Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=4x^3-4x, y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ đạt cực đại tại $x = 0$ và.

Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$ và $y_{CT} = -2$.

c) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{2(3x+1) - 3(2x-1)}{(3x+1)^2} = \dfrac{5}{(3x+1)^2} > 0 \forall x \neq \dfrac{-1}{3}$

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{2}{3}$

Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số $y = \dfrac{2x-1}{3x+1}$ đồng biến trên $\left(-\infty; \dfrac{-1}{3}\right)$ và $\left(\dfrac{-1}{3}; +\infty\right)$.

Hàm số không có cực trị.

d) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x+2)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

Hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

Hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ đạt cực đại tại $x=-2$ và.

Hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ đạt cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT}=2$.

Bài 11: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2x+1}{3x-2}$ trên nửa khoảng $[2;+\infty)$; b) $y=\sqrt{2-x^2}$;

Lời giải

a) Ta có: $y'=\dfrac{-7}{(3x-2)^2}<0\forall x\in[2;+\infty)$

Nên $\max_{[2;+\infty)}y=y(2)=\dfrac{2.2+1}{3.2-2}=\dfrac{5}{4}$, hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên nửa khoảng $[2;+\infty)$.

b) Tập xác định: $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{2-x^2}}, y'=0\Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

$$y\left(-\sqrt{2}\right)=y\left(\sqrt{2}\right)=0; y(0)=\sqrt{2}$$

Do đó, $\min_{\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]}y=y\left(-\sqrt{2}\right)=y\left(\sqrt{2}\right)=0; \max_{\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]}y=y(0)=\sqrt{2}$

Bài 12: Tìm các tiệm cận của mỗi đồ thị hàm số sau:

a) $y=\dfrac{3x-2}{x+1}$; b) $y=\dfrac{x^2+2x-1}{2x-1}$.

Lời giải

a) Ta có: $\lim_{x\to -1^+} y = \lim_{x\to -1^+} \frac{3x-2}{x+1} = -\infty ; \lim_{x\to -1^-} y = \lim_{x\to -1^-} \frac{3x-2}{x+1} = +\infty$

Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{x+1}$ là đường thẳng $x = -1$

Ta có: $\lim_{x\to -\infty} y = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x-2}{x+1} = 3 ; \lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x-2}{x+1} = 3$ nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{x+1}$ đường thẳng $y = 3$.

b) Ta có: $\lim_{x\to \left(\frac{1}{2}\right)^+} y = \lim_{x\to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{x^2+2x-1}{2x-1} = +\infty ; \lim_{x\to \left(\frac{1}{2}\right)^-} y = \lim_{x\to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{x^2+2x-1}{2x-1} = -\infty$

Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2x-1}{2x-1}$ là đường thẳng $x = \frac{1}{2}$.

Ta có: $y = \frac{x^2+2x-1}{2x-1} = \frac{x}{2} + \frac{5}{4} + \frac{1}{4(2x-1)}$

Do đó, $\lim_{x\to +\infty} \left[y - \left(\frac{x}{2} + \frac{5}{4} \right) \right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{4(2x-1)} = 0, \lim_{x\to -\infty} \left[y - \left(\frac{x}{2} + \frac{5}{4} \right) \right] = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{4(2x-1)} = 0$

Vậy tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2x-1}{2x-1}$ là đường thẳng $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{4}$

Ta có: $\lim_{x\to -\infty} y = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2x-1}{2x-1} = -\infty ; \lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+2x-1}{2x-1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2x-1}{2x-1}$ không có tiệm cận ngang.

Bài 13: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 12$; b) $y = \frac{2x-1}{x+1}$; c) $y = \frac{x^2-2x}{x-1}$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên:

Ta có: $y' = -3x^2 + 12x - 9, y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array} \right.$

Trên khoảng $(1;3), y' > 0$ nên hàm số đồng biến. Trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty), y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$, giá trị cực đại. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$, giá trị cực tiểu $y_{CT} = 8$

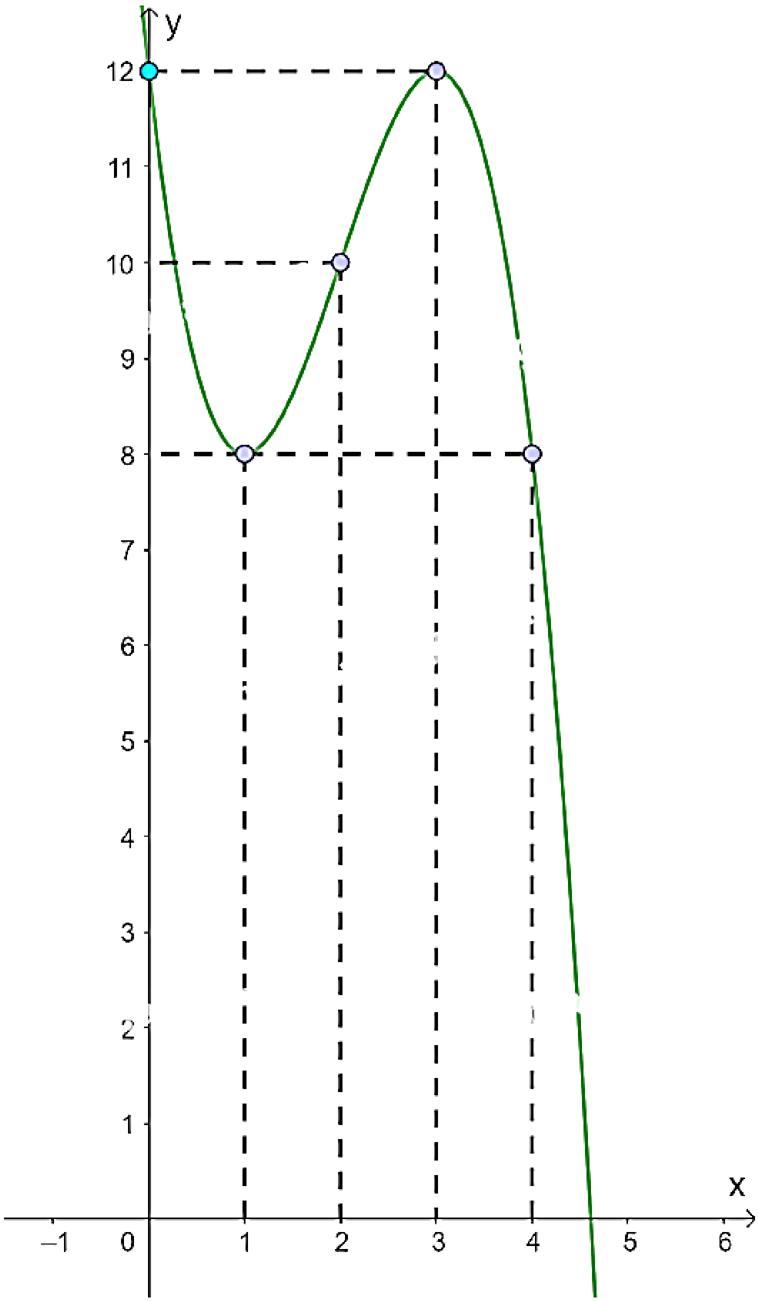
Giới hạn tại vô cực: $\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(-x^3+6x^2-9x+12\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(-1+\dfrac{6}{x}-\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{12}{x^3}\right)\right] = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left(-x^3+6x^2-9x+12\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^3\left(-1+\dfrac{6}{x}-\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{12}{x^3}\right)\right] = -\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		8		12		$-\infty$

Đồ thị:



Giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+6x^2-9x+12$ với trục tung là $(0;12)$.

Đồ thị hàm số $y=-x^3+6x^2-9x+12$ đi qua các điểm (1;8); (3;12); (4;8).

Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $(2;10)$.

b) 1. Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Sự biến thiên:

$$y'=\frac{3}{(x+1)^2}>0\forall x\neq -1$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

Giới hạn: $\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}=2;\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x+1}=2$

$$\lim_{x\to-1^-}y=\lim_{x\to-1^-}\frac{2x-1}{x+1}=+\infty;\ \lim_{x\to-1^+}y=\lim_{x\to-1^+}\frac{2x-1}{x+1}=-\infty$$

Do đó, đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=-1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y=2$ làm tiệm cận ngang.

Bảng biến thiên:

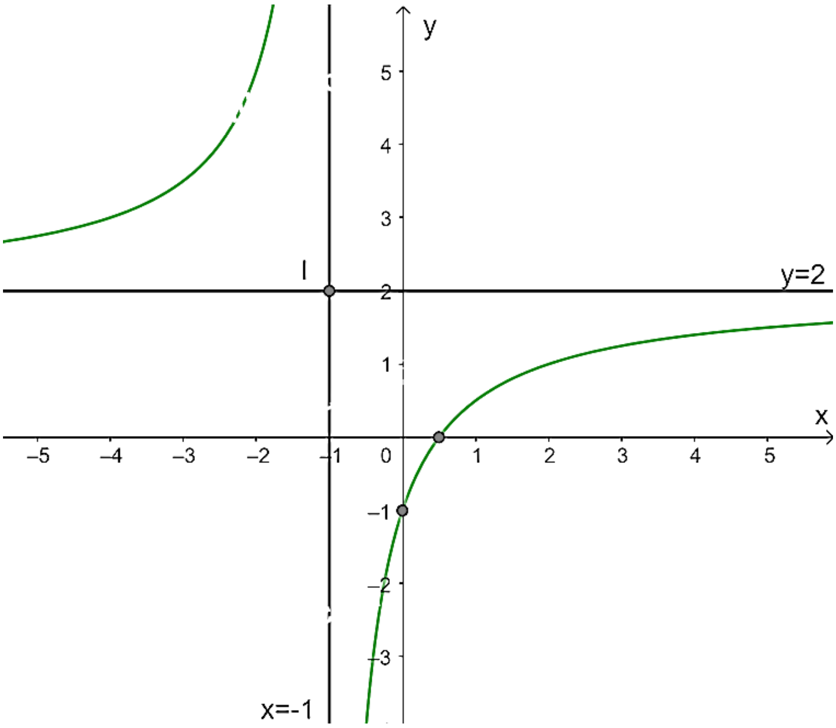
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	2 ↗		$+\infty$ || $-\infty$		↗ 2

Đồ thị: Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;-1)$.

$$y=0\Leftrightarrow\frac{2x-1}{x+1}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm I(-1;2) của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này lâm các trục đối xứng.



c) 1. Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Sự biến thiên:

Ta có: $y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}=x-1-\dfrac{1}{x-1}$

$$y'=\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2}>0\forall x\neq 1$$

Do đó, hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

$$\text{Gioi han: } \lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x}{x-1}=+\infty;\ \lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{x-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}y=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-2x}{x-1}=+\infty;\ \lim_{x\to1^+}y=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-2x}{x-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[y-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1-\frac{1}{x-1}-(x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x-1}=0$$

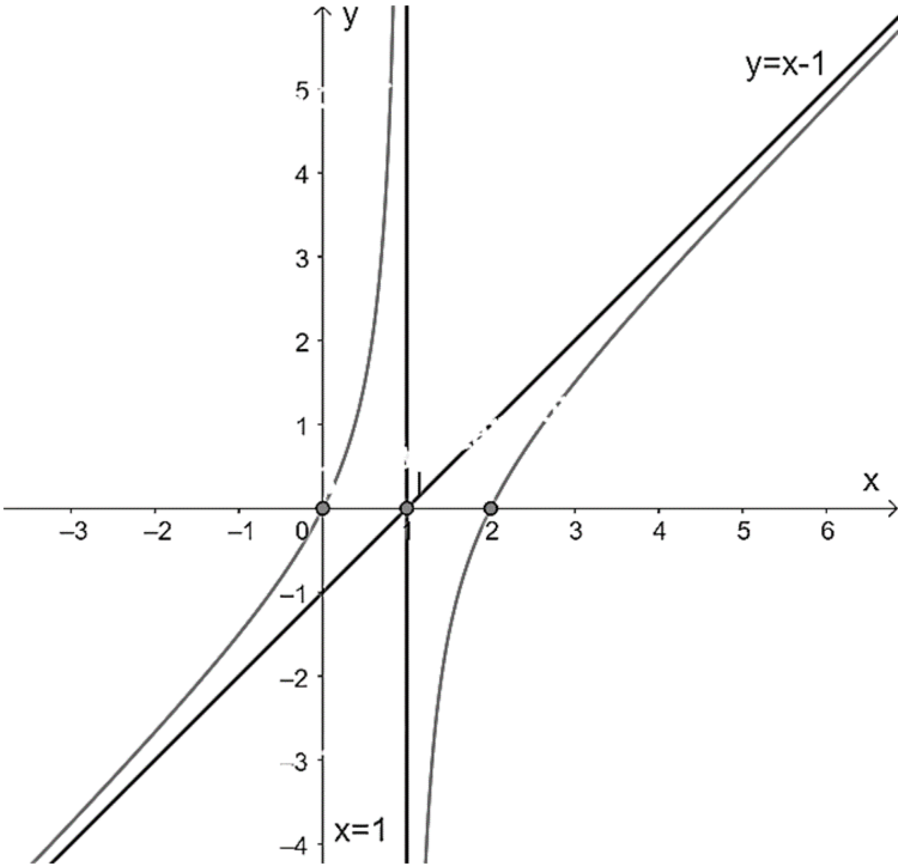
$$\lim_{x\to-\infty}\left[y-(x-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(x-1-\frac{1}{x-1}-(x-1)\right)=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{x-1}=0$$

Do đó, đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y=x-1$ làm tiệm cận xiên.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị:



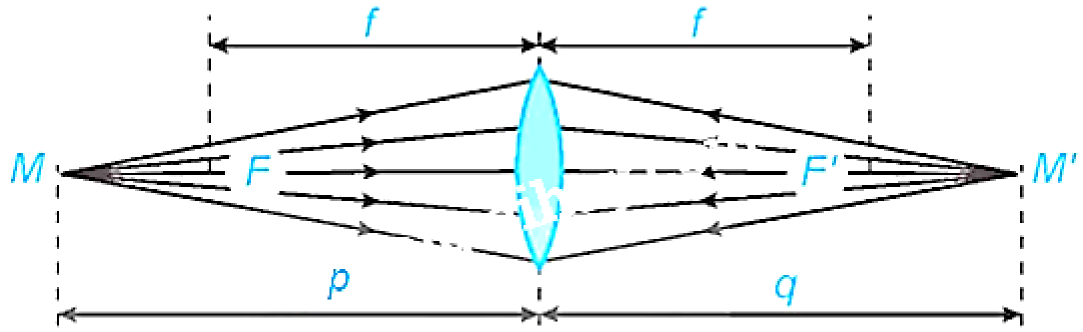
Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;0)$.

$$y=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{x-1}=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x=2$$

Đồ thị hàm số giao với trục hoành tại các điểm $(0;0)$ và $(2;0)$

Đồ thị hàm số nhận giao điểm I(1;0) của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

Bài 14: Xét một thấu kính hội tụ có tiêu cự f(H.1.39). Khoảng cách p từ vật đến thấu kính liên hệ với khoảng cách q từ ảnh đến thấu kính bởi hệ thức: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$.



Hình 1.39

a) Viết công thức tính $q = g(p)$ như một hàm số của biến $p \in (f;+\infty)$.

b) Tính các giới hạn $\lim_{p\to+\infty} g(p), \lim_{p\to f^+} g(p)$ và giải thích ý nghĩa các kết quả này.

Lập bảng biến thiên của hàm số $q = g(p)$ trên khoảng $(f;+\infty)$.

Lời giải

a) Ta có: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \Rightarrow q=\frac{pf}{p-f}$. Do đó, $q=g(p)=\frac{pf}{p-f}$ với $p \in (f;+\infty)$.

b) $\lim_{p\to+\infty} g(p) = \lim_{p\to+\infty}\frac{pf}{p-f} = \lim_{p\to+\infty}\frac{f}{1-\frac{f}{p}} = f, \lim_{p\to f^+} g(p) = \lim_{p\to f^+}\frac{pf}{p-f} = +\infty$

Ý nghĩa của $\lim_{p\to+\infty} g(p) = f$: Khoảng cách từ vật đến thấu kính tiến ra vô cùng thì khoảng cách từ ảnh đến thấu kính xấp xỉ tiêu cự.

Ý nghĩa của $\lim_{p\to f^+} g(p) = +\infty$: Khoảng cách từ vật đến thấu kính tiến gần về tiêu cự f thì khoảng cách từ ảnh đến thấu kính là càng lớn.

c) Ta có: $q' = g'(p) = \frac{-f^2}{(p-f)^2} < 0 \forall p \in (f;+\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên $(f;+\infty)$.

Bảng biến thiên:

p	f		$+\infty$
g'(p)		−	
g(p)	$+\infty$	↘	f

Bài 15: Dân số của một quốc gia sau t(năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức:
$N(t) = 100e^{0,012t}$ (N(t) được tính bằng triệu người, $0 \le t \le 50$).
a) Ước tính dân số của quốc gia này vào các năm 2030 và 2035 (kết quả tính bằng triệu người, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

b) Xem N(t) là hàm số của biến số t xác định trên đoạn [0;50]. Xét chiều biến thiên của hàm số $N(t)$ trên đoạn [0 ; 50].

c) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/ năm). Vào năm nào tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm?

Lời giải

a) Dân số của quốc gia vào năm 2030 là: $N(7)=100e^{0,012.7}=100e^{0,084}=108,763$ (triệu người)

Dân số của quốc gia vào năm 2035 là: $N(12)=100e^{0,012.12}=100e^{0,144}=115,488$ (triệu người)

b) Trên đoạn [0; 50] ta có: $N'(t)=0,012.100e^{0,012t}=1,2e^{0,012t}>0\forall t\in[0;50]$

Do đó, hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn [0; 50].

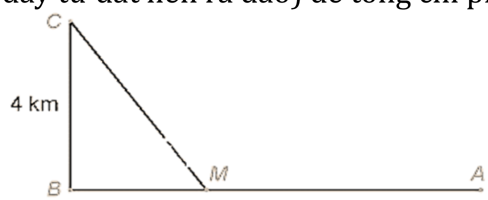
c) Ta có: $N'(t)=1,2e^{0,012t}$

Với tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm ta có:

$$1,6=1,2e^{0,012t}\Leftrightarrow e^{0,012t}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow t=\frac{250\ln\frac{4}{3}}{3}\approx 23,97$$

Vậy vào năm 2046 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/ năm.

Bài 16: Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như Hình 1.40. Khoảng cách từ C đến B là 4km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 10km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng. Xác định vị trí điểm M trên đoạn AB (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất.



Hình 1.40

Lời giải

Đặt $MB=x(km,0\le x\le 10)$, khi đó, $AM=10-x(\text{ km})$ và $MC=\sqrt{MB^2+CB^2}=\sqrt{x^2+16}(\text{ km})$ Khi đó, chi phí nối điện từ A đến C là: $f(x)=30(10-x)+50\sqrt{x^2+16}$ (triệu đồng)

Ta có: $f'(x)=-30+\frac{50x}{\sqrt{x^2+16}}=0\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow 25x^2=9x^2+144\Leftrightarrow x=3$ (do $0\le x\le 10$)

Ta có: $f(0)=500;\ f(3)=460,\ f(10)=100\sqrt{29}$ nên chi phí nhỏ nhất là 460 triệu đồng khi $x=3$

Vậy M cách B một khoảng 3 km trên đoạn AB (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) thì tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất.

▶CHƯƠNG II. VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1 – VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN

I. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

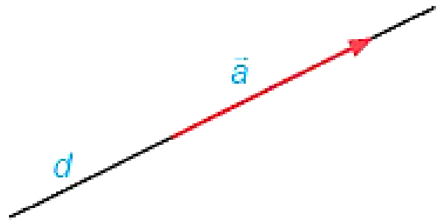
Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, độ dài của vectơ â được kí hiệu là |â|.

Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó



Hình 2.4. Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$.

Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vectơ trong không gian:

Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho

$\overrightarrow{OM}=\vec{a}$.

Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \ldots$ gọi là các vectơ -không.

Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0 ,cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vectơ. Do đó, các vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là 0.

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Mở đầu trang 45 Toán 12 Tập 1: Ở lớp 10, ta đã biết về vectơ trong mặt phẳng và biết sử dụng vectơ để biểu thị các đại lượng có hướng và độ lớn trong mặt phẳng, ví dụ như vận tốc hay lực. Đối với các đại lượng có hướng trong không gian, ta có thể sử dụng vectơ để biểu diễn chúng hay không? Các phép toán vectơ trong trường hợp này giống và khác như thế nào với các phép toán vectơ trong mặt phẳng?

Lời giải

Sau khi học xong bài này, ta thấy rằng:

Trong không gian, vectơ vẫn là công cụ để biểu diễn các đại lượng có hướng như vận tốc, lực hay các đại lượng khác. Các phép toán trong không gian tương tự như trong mặt phẳng nhưng có một số khác biết như:

Biểu diễn vectơ: Trong không gian mỗi vectơ được biểu diễn bởi một cặp ba giá trị (x; y; z).

Các phép toán vectơ: cơ bản vẫn giống trong mặt phẳng.

Trả lời câu hỏi Hoạt động 1 trang 46 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Trong Hình 2.2, lực căng dây (được tạo ra bởi sức nặng của kiện hàng) được thể hiện bởi các đoạn thẳng có mũi tên màu đỏ.

Hình 2.2

a) Các đoạn thẳng này cho biết gì về hướng và độ lớn của các các lực căng dây?

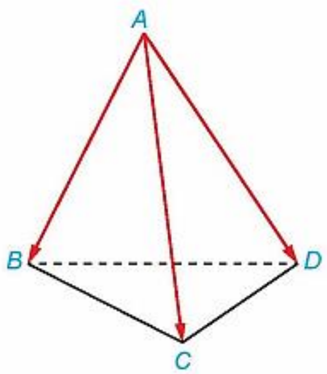
b) Các đoạn thẳng này có cùng nằm trong một mặt phẳng không?

Lời giải

a) Các đoạn thẳng này có hướng lên trên (về phía móc cần cẩu) và độ dài của các đoạn thẳng thể hiện cho độ lớn của các lực căng dây và được lấy tỉ lệ với độ lớn của các lực căng dây.

b) Các đoạn thẳng này không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Ví dụ 1: Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.5).



Hình 2.5

a) Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện?

b) Trong các vectơ tìm được ở câu a, những vectơ nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC) ?

c) Tính độ dài của các vectơ tìm được ở câu a.

Lời giải

a) Có ba vectơ là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Trong ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ chỉ có hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ có giá nằm trong mặt phẳng (ABC).

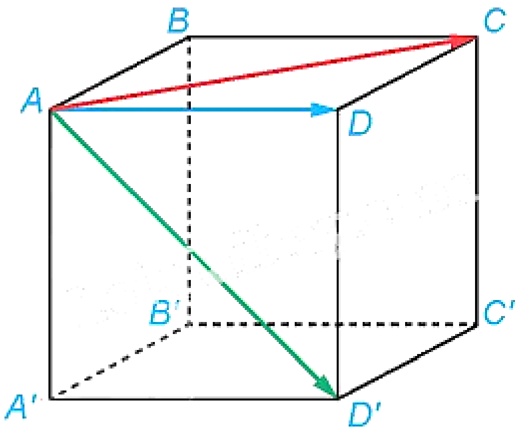
c) Vì tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 nên $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=1$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập trang 47 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'(H.2.6)$. Trong các vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD'}$:

a) Hai vectơ nào có giá cùng nằm trong mặt phẳng (ABCD) ?

b) Hai vectơ nào có cùng độ dài?



Hình 2.6

Lời giải

a) Trong các vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD'}$, hai vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ có giá nằm trong mặt phẳng (ABCD)

b) Vì $ABCD\cdot A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $AD=DC=DD'$

Tam giác ADD' vuông tại D nên theo định lý Pythagore ta có:

$$AD'=\sqrt{AD^2+DD'^2}=AD\sqrt{2}$$

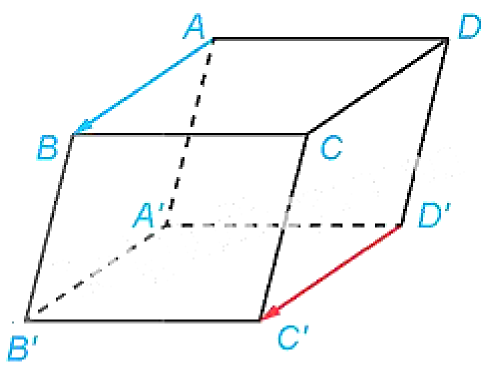
Tam giác ADC vuông tại D nên theo định lý Pythagore ta có:

$$AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=AD\sqrt{2}$$

Do đó, $AD'=AC$ hay $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AD'}\right|$. Vậy hai vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD'}$ có cùng độ dài.

Trả lời câu hỏi Hoạt động 2 trang 47 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ (H.2.7)



Hình 2.7

a) So sánh độ dài hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.
b) Nhận xét về giá của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.
c) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$ có cùng phương không? Có cùng hướng không?

Lời giải

a) Vì $ABCD\cdot A'B'C'D'$ là hình hộp nên $ABCD$ và $DCC'D'$ là các hình bình hành. Suy ra, $AB=CD=D'C'$. Do đó, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{D'C'}\right|$.
b) Vì $ABCD$ và $DCC'D'$ là các hình bình hành nên $AB//CD, CD//C'D'$. Do đó, $AB//C'D'$. Vậy giá của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$ song song với nhau.
c) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$ cùng phương và cùng hướng.

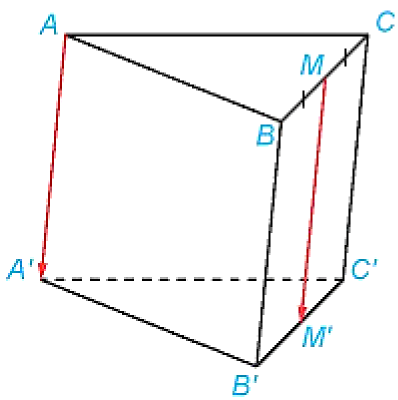
Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'(H.2.8)$.

a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$, vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$.

Lời giải

a) Hai đường thẳng AA' và BC chéo nhau nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không bằng nhau.



Hình 2.8

Tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành nên $AA'//CC'$ và $AA'=CC'$. Hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{CC'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên hai vectơ đó bằng nhau.

Tương tự, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ không bằng nhau.

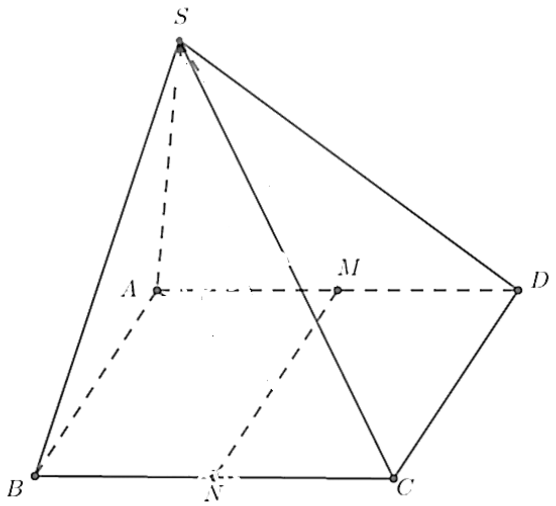
b) Gọi M' là trung điểm của cạnh $B'C'$. Vì tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $MM'//BB'$ và $MM'=BB'$. Hình lăng trụ $ABC\cdot A'B'C'$ có $AA'//BB'$ và $AA'=BB'$, suy ra $MM'//AA'$ và $MM'=AA'$. Hai vectơ $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{AA'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$. Vậy trung điểm của cạnh $B'C'$ là điểm M' cần tìm.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 2 trang 48 SGK Toán 12 Kết nối tri thức
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DC}$, vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Gọi M là một điểm thuộc cạnh AD. Xác định điểm N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải



a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB//CD$ và $AB = CD$. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ có cùng độ dài và củng hướng nên hai vectơ đó bằng nhau.

Vì AB và SC chéo nhau nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$ không cùng phương. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$ không bằng nhau.

Vì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ không cùng phương nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ không bằng nhau.

b) Qua M vẽ đường thẳng song song với AB cắt BC tại N.

Tứ giác $ABNM$ có: $AB//MN, AM//BN$ nên tứ giác $ABNM$ là hình bình hành. Do đó, $AB = MN$, lại có: $AB//MN$ nên hai vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}$ cùng độ dài và cùng hướng. Suy ra, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$. Vậy điểm N cần tìm là giao điểm của đường thẳng qua M song song với AB và cạnh BC.

Trả lời câu hỏi Vận dụng 1 trang 48 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Một tòa nhà có chiều cao của các tầng là như nhau. Một chiếc thang máy di chuyển từ tầng 15 lên tầng 22 của tòa nhà, sau đó di chuyển từ tầng 22 lên tầng 29. Các vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy trong hai lần di chuyển đó có bằng nhau không? Giải thích vì sao.

Hình 2.9

Lời giải

Gọi vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy từ tầng 15 lên tầng 22 của tòa nhà là $\vec{a}$. Gọi vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy từ tầng 22 lên tầng 29 của tòa nhà là $\vec{b}$.
Vì hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều dịch chuyển từ tầng thấp lên tầng cao nên hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng hướng (1).
Độ dài vectơ $\vec{a}$ là: $|\vec{a}| = 7$, độ dài vectơ $\vec{b}$ là: $|\vec{b}| = 7$ nên $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 7$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\vec{a} = \vec{b}$. Vậy các vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy trong hai lần di chuyển đó có bằng nhau.

II. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

a) Tổng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A bất kì và các điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.
Bốn điểm A, B, A', B' đồng phẳng và tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành.

Chú ý: Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tính chất sau:

Tính chất giao hoán: Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Tính chất kết hợp: Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vectơ bât kì thì $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

Tính chất cộng với vectơ $\vec{0}$: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Từ tính chất kết hợp của phép cộng vectơ trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vectơ trong không gian.

Cho hình h�p $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

b) Hiệu của hai vectơ trong không gian

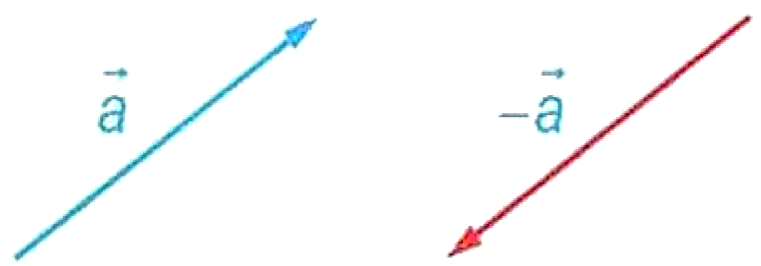
Trong không gian, vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ ả được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

Chú ý:

Hai vectơ là đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$.

Vectơ $\overrightarrow{BA}$ là một vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Vectơ 0 được coi là vectơ đối của chính nó.



Tương tự như hiệu của hai vectơ trong mặt phẳng,

ta có định nghĩa về hiệu của hai vectơ trong không gian:

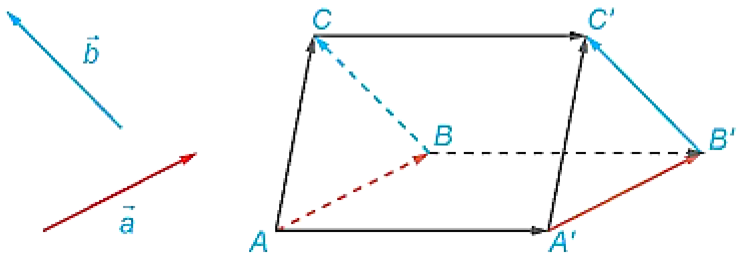
Vectơ $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ được gọi là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Trả lời câu hỏi Hoạt động 3 trang 49 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Lấy điểm A và vẽ các vectơ $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Lấy điểm A' và vẽ các vectơ $\overrightarrow{A'B'}=\vec{a},\overrightarrow{B'C'}=\vec{b}$ (H.2.10).



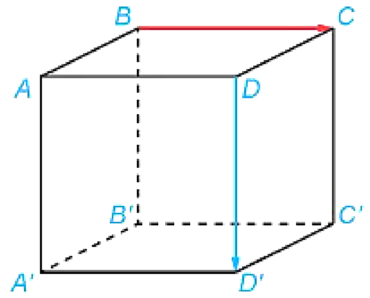
Hình 2.10

a) Giải thích vì sao $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$ và $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$.
b) Giải thích vì sao $AA'C'C$ là hình bình hành, từ đó suy ra $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$.

Lời giải

a) vì $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ nên hai vectơ $\vec{a}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng và cùng độ dài.
vì $\overrightarrow{A'B'}=\vec{a}$ nên hai vectơ $\vec{a}$ và $\overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng và cùng độ dài.
Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng và cùng độ dài. Suy ra, $AB//A'B'$ và $AB=A'B'$. Do đó, tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành. Suy ra, $AA'//BB'$ và $AA'=BB'\Rightarrow$ hai vectơ $\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BB'}$ có cùng hướng và cùng độ dài. Suy ra, $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$.
vi $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ nên hai vectơ $\vec{b}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng và cùng độ dài.
vì $\overrightarrow{B'C'}=\vec{b}$ nên hai vectơ $\vec{b}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ cùng hướng và cùng độ dài.
Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ cùng hướng và cùng độ dài. Suy ra, $BC//B'C'$ và $BC=B'C'$. Do đó, tứ giác $CBB'C'$ là hình bình hành. Suy ra, $CC'//BB'$ và $CC'=BB'\Rightarrow$ hai vectơ $\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{CC'}$ có cùng hướng và cùng độ dài. Suy ra, $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$.
b) Vì hai vectơ $\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BB'}$ có cùng hướng và cùng độ dài; hai vectơ $\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{CC'}$ có cùng hướng và cùng độ dài nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{CC'}$ có cùng hướng và cùng độ dài. Do đó, $AA'//CC'$ và $AA'=CC'$ nên tứ giác $AA'C'C$ là hình bình hành. Suy ra, $AC=A'C'$ và $AC//A'C'$. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{A'C'}$ có cùng hướng và cùng độ dài. Suy ra, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$.

Ví dụ 3: Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng $1\left(H.2.12\right)$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD'}$.



Hình 2.12

Lời giải

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

Do đó $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AD'}$.

Tứ giác $ADD'A'$ là hình vuông nên $AD'=\sqrt{AD^2+DD'^2}=\sqrt{2}$, suy ra $\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD'}\right|=\sqrt{2}$.

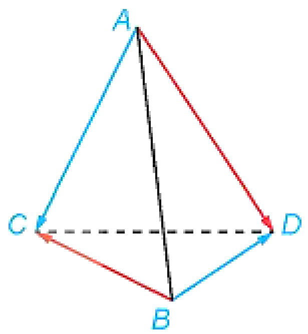
Trả lời câu hỏi Luyện tập 3 trang 50 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Trong ví dụ 3, hãy tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'D'}$.

Lời giải

Vì $ABCD\cdot A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $DCC'D'$ là hình vuông. Do đó, $\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{CD}$.
Ta có: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$
Vì độ dài mỗi cạnh hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$ bằng 1 nên $\left|\overrightarrow{AD}\right|=1$.
Vậy $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'D'}\right|=1$

Ví dụ 4: Cho tứ diên $ABCD$ (H.2.13). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.



Hình 2.13

Lời giải

Theo quy tắc ba điểm trong không gian, ta có $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$.

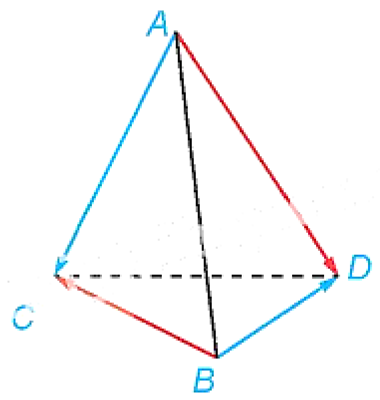
Từ đó lần lượt áp dụng tính chất của phép cộng vectơ trong không gian, ta được:

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}\right)$$

$$= \overrightarrow{AD} + \left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$

Trả lời câu hỏi Luyện tập 4 trang 50 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Cho tứ diện ABCD (H.2.13). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.



Hình 2.13

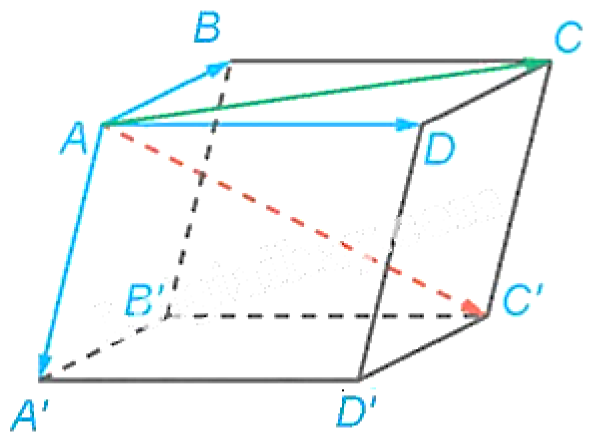
Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}\right)$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \text{ (đpcm)}$$

Trả lời câu hỏi Hoạt động 4 trang 50 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’ (H.2.14).



Hình 2.14

a) Hai vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AC}$ có bằng nhau hay không?
b) Hai vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AC'}$ có bằng nhau hay không?

Phương pháp giải:
Sử dụng quy tắc hình bình hành để chứng minh: Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Lời giải

a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}$ (1)

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $A'A'D'D$ và $D'C'C$ là hình bình hành. Do đó, $A'//DD', AA'=DD'$ và $DD'=CC', DD'//CC'$. Suy ra, $A'//CC'$ và $AA'=CC'$. Suy ra, tứ giác $AA'C'C$ là hình bình hành. Suy ra: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}(2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

Ví dụ 5: Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'(H.2.14)$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

Lời giải

Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$. Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

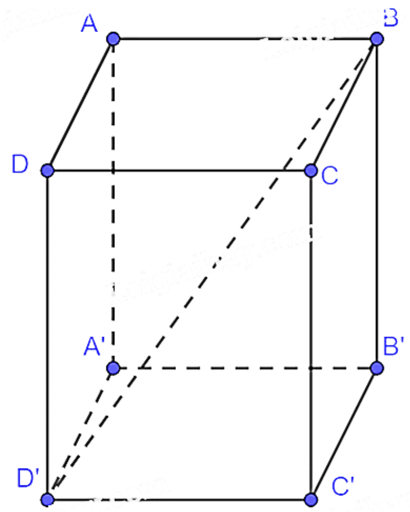
Trả lời câu hỏi Luyện tập 5 trang 50 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Cho hình hộp hình chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD'}$

Phương pháp giải:

Sử dụng kiến thức về quy tắc hình hộp để giải: Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Khi đó, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ Vì $ABCD\cdot A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD'}$ Ta có: $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD'}$

Trả lời câu hỏi Hoạt động 5 trang 51 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Hình 2.15 mô tả một lọ hoa được đặt trên bàn, trọng lượng của lọ hoa tạo nên một lực tác dụng lên mặt bàn và một phản lực từ mặt bàn lên lọ hoa. Có nhận xét về độ dài và hướng của các vectơ biểu diễn hai lực đó.

Hình 2.15

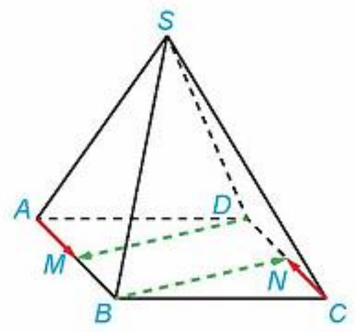
Lời giải

Các vectơ biểu diễn hai lực đó có độ dài bằng nhau và hướng của chúng là ngược nhau.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $AB, CD\left(\text{H.2.16}\right)$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ là hai vectơ đối nhau;

b) $\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SA}$.



Hình 2.16

Lời giải

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB=CD$ và $AB//CD$, suy ra $AM=CN$ và $AM//CN$. Hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vectơ đối nhau.

b) Từ câu a, ta có $\overrightarrow{CN}=-\overrightarrow{AM}$.

Suy ra $\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SN}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SN}+\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{SA}$.

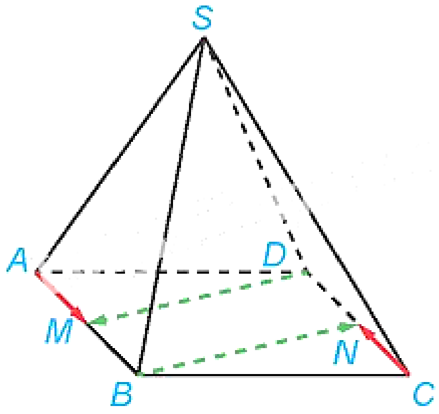
Trả lời câu hỏi Luyện tập 6 trang 52 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Trong Ví dụ 6, chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ là hai vectơ đối nhau;

b) $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SC}$

Lời giải



a) Tứ giác ABCD là hình bình hành nên $AB = CD$, AB//CD. Suy ra $BM = DN$ (vì M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD) và $BM // DN$. Do đó, tứ giác $DMBN$ là hình bình hành, do đó, $BN = DM$ và

b) $BN // DM$. Hai vectơ $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ là hai vectơ đối nhau.

b) Theo a ta có: $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{DM}$

Do đó, $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{SC}$

Trả lời câu hỏi Vận dụng 2 trang 52 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Thang cuốn tại các trung tâm thương mại, siêu thị hay nhà ga, sân bay thường có hai làn, trong đó một làn lên và một làn xuống. Khi thang cuốn chuyển động, vectơ biểu diễn vận tốc của mỗi làn có là hai vectơ đối nhau không? Giải thích vì sao.

Lời giải

Vectơ biểu diễn vận tốc của mỗi làn có cùng độ lớn và hướng ngược nhau nên chúng là hai vectơ đối nhau.

III. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

Cùng hướng với vectơ a nếu $k>0$; ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k<0$;

Có độ dài bằng $|k|\cdot|\vec{a}|$.

Trong không gian, phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.

Chú ý:

Quy ước $k\vec{a}=\vec{0}$ nếu $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.

Nếu $k\vec{a}=\vec{0}$ thì $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.

Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}\left(\vec{b}\neq\vec{0}\right)$ cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

Chú ý: Tương tự như phép nhân một số với một vectơ trong mặt phẳng, phép nhân một số với một vectơ trong không gian có các tính chất sau:

Tính chất kết hợp: Nếu h,k là hai số thực và $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $h\left(k\vec{a}\right)=\left(hk\right)\vec{a}$.

Tính chất phân phối: Nếu h,k là hai số thực và $\vec{a},\vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $\left(h+k\right)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$ và $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$.

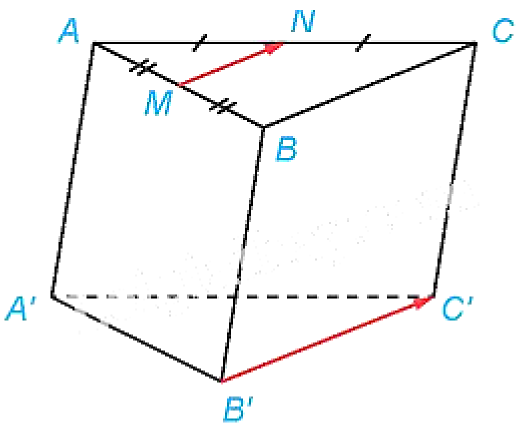
Tính chất nhân với 1 và -1: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $1\vec{a}=\vec{a}$ và $\left(-1\right)\vec{a}=-\vec{a}$.

Chú ý: Tương tự như trong mặt phẳng, nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với điểm O tuỳ ý, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Trả lời câu hỏi Hoạt động 6 trang 52 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC (H.2.17)



Hình 2.17

a) Hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ có cùng phương không? Có cùng hướng không?

b) Giải thích vì sao $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{B'C'}\right|$.

Lời giải

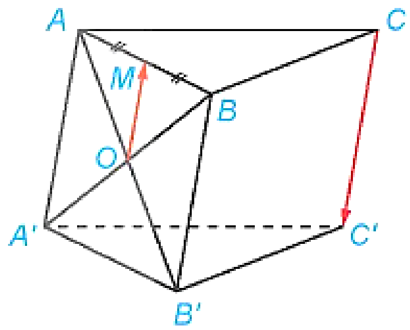
a) Vì MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN//BC$.

Vì $BCC'B'$ là hình bình hành nên $BC//B'C'$. Suy ra: $MN//B'C'$.
Do đó hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ có cùng phương và cùng hướng.
b) Vì $BCC'B'$ là hình bình hành nên $BC = B'C'$

Vì MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN = \frac{1}{2}BC$

Suy ra: $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{B'C'}\right|$.
Ví dụ 7: Trong HĐ6, gọi O là giao điểm của AB' và $A'B$ (H.2.18).

Chứng minh rằng $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.



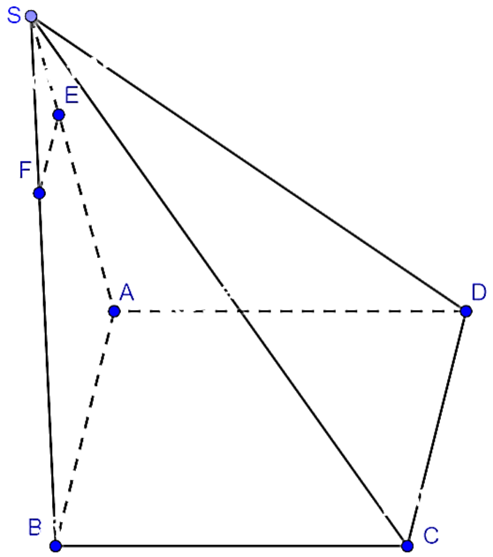
Hình 2.18

Lời giải

Vì O là trung điểm của AB' nên OM là đường trung bình của tam giác $AB'B$. Suy ra $B'B//OM$ và $B'B = 2OM$. Tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $B'B//C'C$ và $B'B = C'C$. Do đó $C'C//OM$ và $C'C = 2OM$. Vì hai vectơ $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{OM}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 7 trang 53 SGK Toán 12 Kết nối tri thức
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SB sao cho $SE = \frac{1}{3}SA, SF = \frac{1}{3}SB$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

Lời giải



vì $SE = \frac{1}{3}SA, SF = \frac{1}{3}SB \Rightarrow \frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SB}\left(=\frac{1}{3}\right)$

Tam giác SAB có: $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SB}$ nên FE//AB và $EF = \frac{1}{3}AB$.

Vì hai vectơ $\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (1)

Vì ABCD là hình bình hành nên $AB = CD$ và AB//CD. Do đó, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

Ví dụ 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD (H.2.19). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Lời giải

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

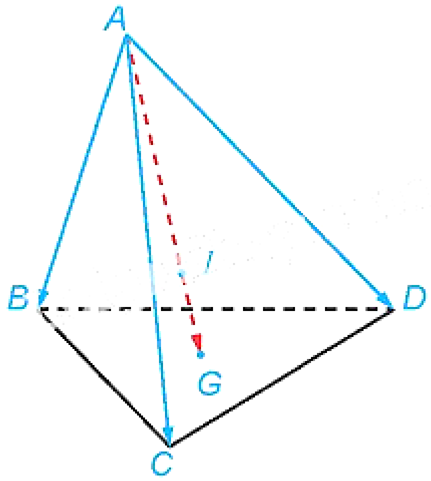
Do đó ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$

$$= 3\overrightarrow{AG} + \left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right) = 3\overrightarrow{AG} + \vec{0} = 3\overrightarrow{AG}$$

Trả lời câu hỏi Luyện tập 8 trang 54 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Trong Ví dụ 8, gọi I là điểm thuộc đoạn thẳng AG sao cho $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{IG}$ (H.2.19). Chứng minh rằng $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

Lời giải



Theo ví dụ 8 ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{ID}=3\overrightarrow{AG}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=3\overrightarrow{AG}-3\overrightarrow{AI}=3\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{IA}\right)=3\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{AI} \Rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$$

Trả lời câu hỏi Vận dụng 3 trang 54 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của đông cơ, lực cản cưa không khí, trọng lực vả lực nâng khí động học (H.2.20). Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và cổ độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc mây bay tăng vận tốc tữ $900 \mathrm{~km} / \mathrm{h}$ lên $920 \mathrm{~km} / \mathrm{h}$, trong quá trình tăng tốc máy bay giứ nguyên hướng bay. Lực cán của khống khí khi máy bay đạt vận tốc $900 \mathrm{~km} / \mathrm{h}$ và $920 \mathrm{~km} / \mathrm{h}$ lần lượt được biểu diễn bởi hai vectơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$. Hãy giải thích vì sao $\overrightarrow{F_1}=k\overrightarrow{F_2}$ với k là một số thực dương nào đó. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Hình 2.20

Lời giải

Vì trong quá trình máy bay tăng vận tốc từ $900 \mathrm{~km} / \mathrm{h}$ lên $920 \mathrm{~km} / \mathrm{h}$ máy bay giữ nguyên hướng bay nên vectơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ có cùng hướng. Do đó, $\overrightarrow{F_1}=k\overrightarrow{F_2}$ với k là một số thực dương nào đó (1).

Gọi v_1, v_2 lần lượt là vận tốc của của chiếc máy bay khi đạt $900 \mathrm{~km} / \mathrm{h}$ và $920 \mathrm{~km} / \mathrm{h}$.

Suy ra $v_1=900(\mathrm{~km} / \mathrm{h}), v_2=920(\mathrm{~km} / \mathrm{h})$

vì lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay nên

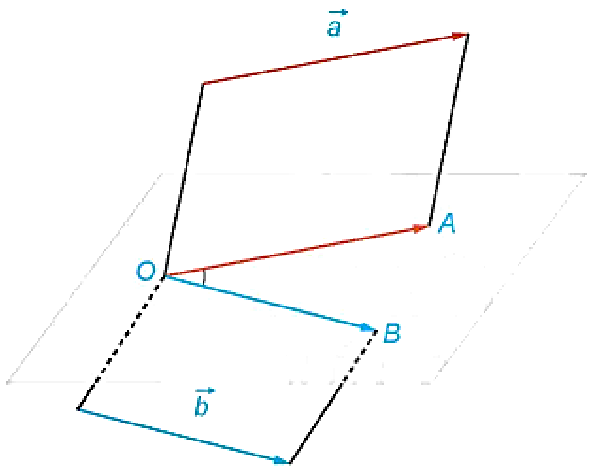
$$\frac{\left|\overrightarrow{F_1}\right|}{\left|\overrightarrow{F_2}\right|}=\frac{v_1^2}{v_2^2}=\frac{900^2}{920^2}=\frac{2025}{2116} \Rightarrow \left|\overrightarrow{F_1}\right|=\frac{2025}{2116}\left|\overrightarrow{F_2}\right|$$

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{F_1} = \dfrac{2025}{2116}\overrightarrow{F_2} \Rightarrow k = \dfrac{2025}{2116} \approx 0,96$

IV. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

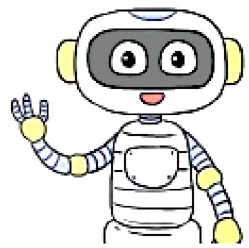
a) Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và gọi A,B là hai điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc $AOB\left(0^\circ \le AOB \le 180^\circ\right)$ được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.



Hình 2.22

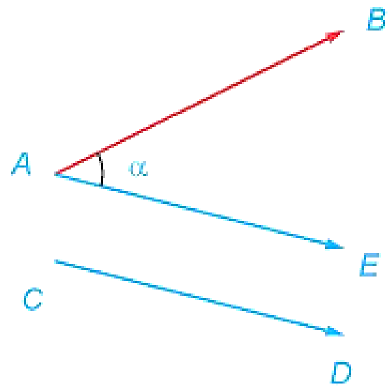
Nếu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 90° thì ta nói hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau và kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.



Chú ý:

Để xác định góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$, khi đó $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = BAE\,(\text{H.2.23})$.

Quy ước góc giữa một vectơ bất kì và 0 có thể nhận một giá trị tuỳ ý từ 0° đến 180°.



Hình 2.23

b) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}\cdot\vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

Chú ý:

Quy ước nếu $\vec{a}=\vec{0}$ hoặc $\vec{b}=\vec{0}$ thì $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Khi đó: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

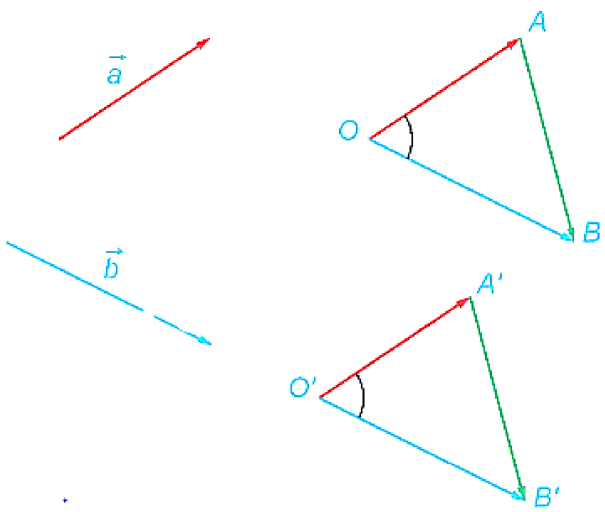
Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta có $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

Nếu $\vec{a},\vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$.

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Trả lời câu hỏi Hoạt động 7 trang 54 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy điểm O và vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Lấy điểm O' khác O và vẽ các vectơ $\overrightarrow{O'A'}=\vec{a},\overrightarrow{O'B'}=\vec{b}$ (H.2.21).



Hình 2.21

a) Hãy giải thích vì sao $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$.

b) Áp dụng định lí côsin cho hai tam giác OAB và $O'A'B'$ để giải thích vì sao $AOB=A'O'B'$

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB};\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{A'O'}+\overrightarrow{O'B'}$

Mà $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{O'A'}=\vec{a},\overrightarrow{O'B'}=\vec{b}\Rightarrow\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{A'O'};\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{O'B'}$

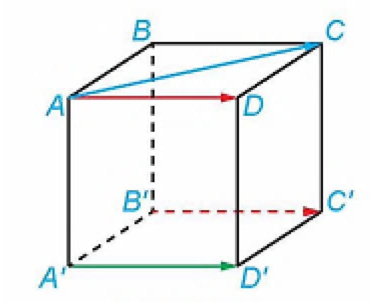
Do đó, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$

b) Áp dụng định lí côsin vào tam giác AOB ta có: $\cos AOB=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA\cdot OB}$

Áp dụng định lí côsin vào tam giác A' $A'B'$ ta có: $\cos A'O'B'=\dfrac{O'A'^2+O'B'^2-A'B'^2}{2.O'A'\cdot O'B'}$

vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}\Rightarrow AB=A'B',\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{A'O'}\Rightarrow OA=O'A';\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{O'B'}\Rightarrow OB=O'B'$

Do đó, $\cos AOB = \cos A'O'B' \Rightarrow AOB = A'O'B'$
Ví dụ 9: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (H.2.24).



Hình 2.24

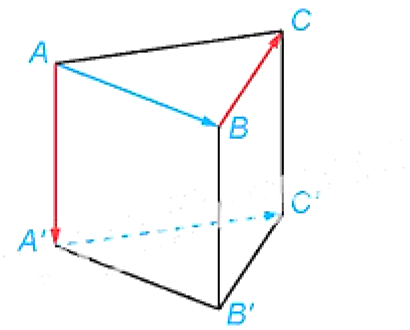
Tính góc giữa các cặp vectơ sau:
a) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$; b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'D'}$

Lời giải

a) Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ cùng hướng nên $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{B'C'}\right) = 0^\circ$.

b) Vì tứ giác $ADD'A'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$. Do đó $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = CAD$. Tam giác ADC vuông cân tại D nên $CAD = 45^\circ$, vì vậy $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}\right) = 45^\circ$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 9 trang 56 SGK Toán 12 Kết nối tri thức
Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC \cdot A'B'C'(H.2.25)$. Tính các góc $\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC}\right)$ và $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\right)$.



Hình 2.25

Lời giải

Vì $ABC \cdot A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên $AA'B'B$ là hình chữ nhật. Suy ra, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Do đó:
$\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BC}\right) = B'BC = 90^\circ$ (do $BB'C'C$ là hình chữ nhật)
Vì AA'B'B là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.
Do đó, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = C'A'B'$.
Vì tam giác $A'B'C'$ là tam giác đều nên $C'A'B' = 60^\circ$. Do đó, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\right) = 60^\circ$.

Trả lời câu hỏi Hoạt động 8 trang 56 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Hãy nhắc lại công thức xác định tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng.

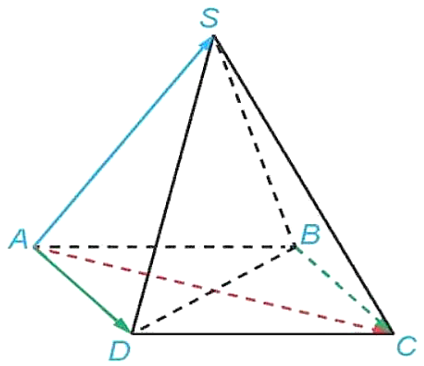
Lời giải

Công thức xác định tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng: Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u}\cdot\vec{v}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v}).$$

Ví dụ 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a (H.2.26). Tính các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AC}$.



Hình 2.26

Lời giải

a) Tam giác SAD có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều, suy ra $SAD = 60^\circ$. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, suy ra $\left(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AD}\right) = SAD = 60^\circ$. Do đó

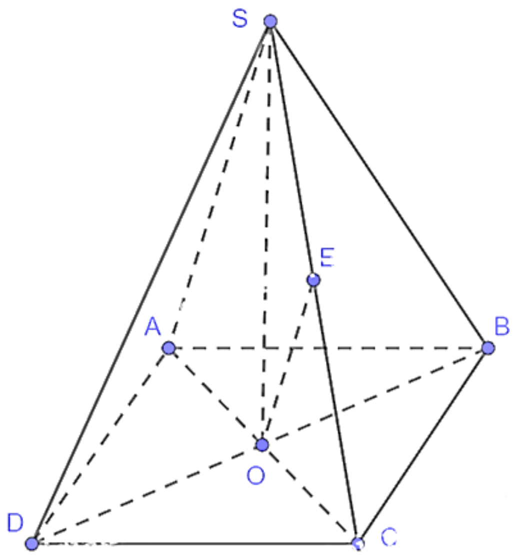
$\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{AS}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos 60^\circ = a\cdot a\cdot\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$.

b) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông có độ dài mỗi cạnh là a nên độ dài đường chéo AC là $\sqrt{2}a$. Tam giác SAC có $SA = SC = a$ và $AC = \sqrt{2}a$ nên tam giác SAC vuông cân tại S, suy ra $SAC = 45^\circ$. Do đó $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AS}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos SAC = a\cdot\sqrt{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 10 trang 57 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Trong Ví dụ 10, hãy tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{CD}$

Lời giải



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD trong hình vuông ABCD. Do đó, O là trung điểm của BD, O là trung điểm của AC.

Tứ giác ABCD là hình vuông cạnh a nên độ dài đường chéo BD là $a\sqrt{2} \Rightarrow OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Gọi E là trung điểm của SC. Mà O là trung điểm của AC nên OE là đường trung bình của tam giác SAC, do đó, OE//SA, $OE = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$. Suy ra: $\overrightarrow{AS} = 2\overrightarrow{OE}$

Vì O là trung điểm của BD nên $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{OB}$

Vì tam giác SBC có ba cạnh bằng nhau nên tam giác SBC là tam giác đều. Do đó, BE là đường trung tuyến đồng thời là đường cao của tam giác SBC. Do đó, $EB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $OE^2 + OB^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{4} = EB^2$ nên $\triangle$ EOB vuông tại O. Do đó, $\overrightarrow{OE} \perp \overrightarrow{OB}$

Ta có: $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{OE} \cdot \left(-2\overrightarrow{OB}\right) = -4\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

Ta có: $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = -\left|\overrightarrow{AS}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\left(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB}\right) = -\left|\overrightarrow{AS}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos SAB$

Vì tam giác SAB có ba cạnh bằng nhau nên tam giác SAB đều, suy ra $SAB = 60^\circ$

Suy ra: $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{CD} = -\left|\overrightarrow{AS}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos SAB = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{-a^2}{2}$

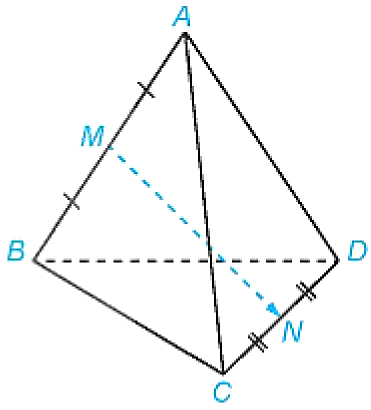
Ví dụ 11: Cho tứ diện $ABCD$ có AC và BD cùng vuông góc với AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD (H.2.27). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$ b) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$.

Do đó $2\overrightarrow{MN} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right) + \left(\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}\right)$.



Hình 2.27

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}=\vec{0}$.

Suy ra $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$, hay $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

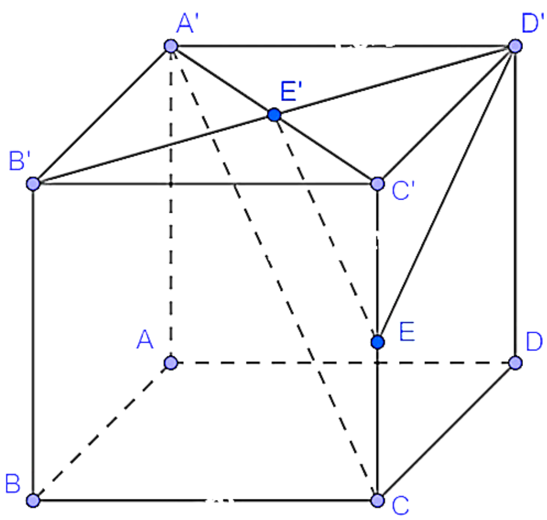
b) Từ giả thiết, ta có $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

Vì vậy, $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 11 trang 57 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{B'D'}=0$.

Lời giải



Giả sử cạnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng 1. Khi đó, $A'C'=B'D'=\sqrt{2}$

Gọi E' là giao điểm của hai đường chéo $A'C'$ và $B'D'$ của hình vuông $A'B'C'D'$. Khi đó, E' là trung điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Suy ra $\overrightarrow{B'D'}=2\overrightarrow{E'D'}$ và $E'D'=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Gọi E là trung điểm của CC'. Mà E' là trung điểm của $A'C'$ nên EE là đường trung bình của tam giác $A'C'C$. Do đó, $\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{E'E}$ và $E'E=\frac{1}{2}A'C$

Áp dụng định lí Pythagore vào $\Delta A'C'C$ vuông tại C' có: $A'C=\sqrt{A'C^2+C'C^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$

$\Rightarrow E'E = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Áp dụng định lí Pythagore vào $\Delta D'C'E$ vuông tại C' có:

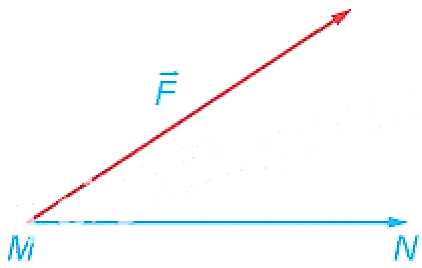
$$ED'^2 = C'D'^2 + C'E^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Vì $E'D'^2 + E'E^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4} = ED'^2$ nên $\Delta E'D'$ E vuông tại E'. Do đó, $\overrightarrow{E'E} \perp \overrightarrow{E'D'}$

Ta có: $\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{B'D'} = 2 \cdot \overrightarrow{E'E} \cdot 2 \cdot \overrightarrow{E'D'} = 0$ (đpcm)

Trả lời câu hỏi Vận dụng 4 trang 57 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Như đã biết, nếu có một lực $\vec{F}$ tác động vào một vật tại điểm M và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường MN thì công A sinh ra được tính theo công thức $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$, trong đó lực F có độ lớn tính bằng Newton, quãng đường MN tính bằng mét và công A tính bằng Jun (H.2.28). Do đó, nếu dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn không đổi để lâm một vật di chuyển một quãng đường không đối thì công sinh ra sẽ lớn nhất khi lực tác đônng cưng hướng với chuyển động của vật. Hãy giải thích vì sao. Kết quả trên có thể được áp dụng như thể nảo khi kêo (hoặc đầy) các vật nặng?



Hình 2.28

Lời giải

Ta có: $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MN}\right| \cdot \cos\left(\vec{F}, \overrightarrow{MN}\right)$

vì lực $\vec{F}$ có độ lớn không đổi và vật di chuyển một quãng đường không đổi nên A lớn nhất khi $\cos\left(\vec{F}, \overrightarrow{MN}\right)$ lớn nhất. Do đó, $\cos\left(\vec{F}, \overrightarrow{MN}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\vec{F}, \overrightarrow{MN}\right) = 0^0$. Khi đó, lực tác động cùng hướng với chuyển động của vật. Vậy công sinh ra sẽ lớn nhất khi lực tác động cùng hướng với chuyển động của vật.

Khi kéo (hoặc đẩy) các vật nặng, ta nên kéo (hoặc đẩy) cùng cùng hướng với chuyển động của vật.

V. GIẢI BÀI TẬP SGK

Bài 1: Trong không gian, cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ phân biệt và đều khác $\vec{0}$. Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

c) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

d) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

Lời giải

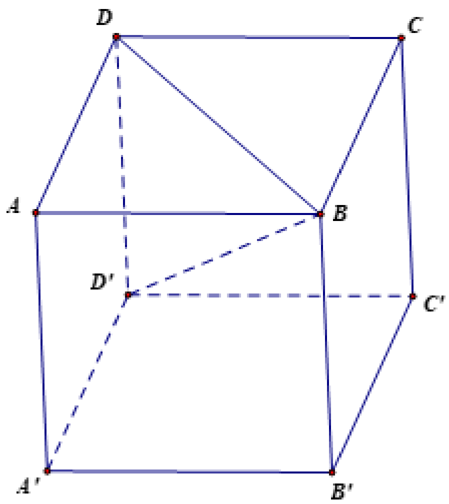
Các câu đúng là:

a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

Bài 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = 2, AD = 3$ và $AA' = 4$. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BD'}$.

Lời giải



Vì $B'BAA'$ là hình chữ nhật nên $BB' = AA' = DD' = 4 \Rightarrow \left|\overrightarrow{BB'}\right| = 4$

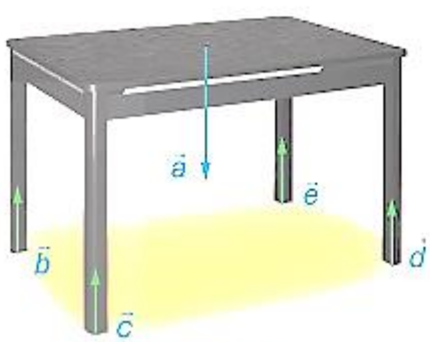
Vì tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên tam giác BAD vuông tại A.

Do đó, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ (định lí Pythagore), suy ra: $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{13}$

Vì BB'D'D là hình chữ nhật nên tam giác DD'B vuông tại D

Theo định lí Pythagore ta có: $BD' = \sqrt{BD^2 + DD'^2} = \sqrt{13 + 4^2} = \sqrt{29} \Rightarrow \left|\overrightarrow{BD'}\right| = \sqrt{29}$

Bài 3: Một chiếc bàn cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như Hình 2.29. Trọng lực tác dụng lên bàn (biểu thị bởi vectơ $\vec{a}$) phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn (biểu thị bởi các vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$).



Hình 2.29

a) Hãy chỉ ra mối quan hệ về phương và hướng của các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ và $\vec{e}$.

b) Giải thích vì sao các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ đôi một bằng nhau.

Lời giải

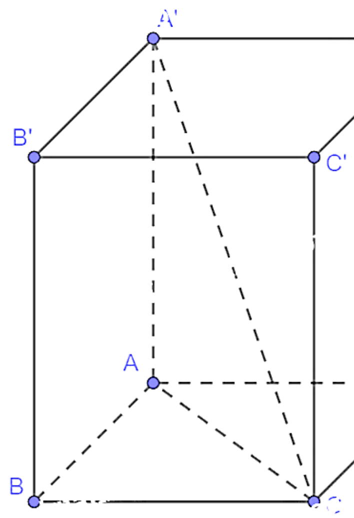
a) Các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ và $\vec{e}$ có cùng phương; các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ cùng hướng với nhau và ngược hướng với vectơ $\vec{e}$.

b) Vì trọng lực tác dụng lên bàn phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn nên các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ có độ lớn bằng nhau. Mà các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ cùng hướng với nhau. Do đó, các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ đôi một bằng nhau.

Bài 4: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{CC'}$ b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD'}-\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$ c) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{A'C}$

Lời giải



a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

Vì CDD'C' là hình bình hành nên $\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{CC'}$

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}\right)+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CC'}$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD'}-\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

c) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}$

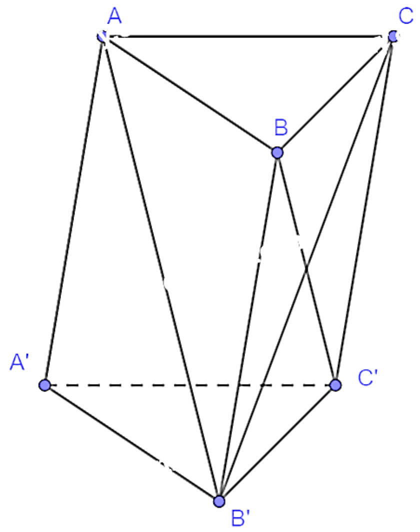
Vì A'ACC' là hình bình hành nên $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA'}$

$$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DC}=-\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}\right)-\overrightarrow{CC'}=-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CC'}=-\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CC'}\right)=-\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{A'C}$$

Bài 5: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}$ và $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy biểu diễn các vectơ sau qua các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

a) $\overrightarrow{AB'}$; b) $\overrightarrow{B'C}$ c) $\overrightarrow{BC'}$.

Lời giải



a) Vì A'ABB' là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$
b) Vì A'ABB' là hình bình hành nên $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\vec{a}$

Ta có: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\vec{b}+\vec{c}$
vì $C'CBB'$ là hình bình hành nên

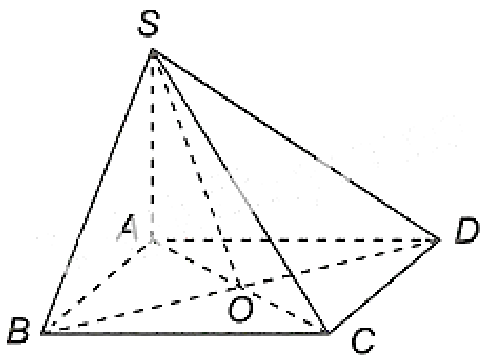
$$\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{BC}=-\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'B}=-\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}$$

c) Vì C'CBB' là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=-\vec{b}+\vec{c}+\vec{a}$

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác $S\cdot ABCD$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu và chỉ nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$

Lời giải



Chứng minh: Nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$ Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Khi đó, O là trung điểm của AC, BD.

Suy ra $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$

Ta có: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{SO}+\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\right)=2\overrightarrow{SO}$

$\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{SO}+\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}\right)=2\overrightarrow{SO}$ Do đó, $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$

Chứng minh: Nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành:
Ta có: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}\Leftrightarrow\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$

Suy ra, hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng và có độ lớn bằng nhau.
Suy ra, $AB = CD$, AB//CD. Khi đó, tứ giác ABCD là hình bình hành.
Vậy tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu và chỉ nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$

Câu 5: Cho hình chóp S.ABC. Trên cạnh SA, lấy điểm M sao cho $SM = 2AM$. Trên cạnh BC, lấy điểm N sao cho $CN = 2BN$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{AB}$.

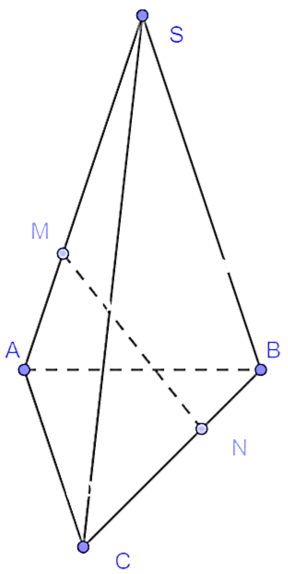
Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

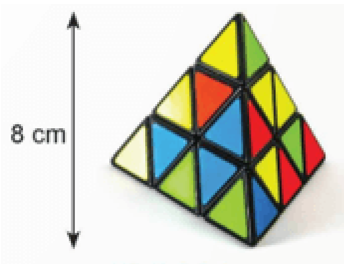
$= \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{AB}$ (đpcm)

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{AB}$ (đpcm)

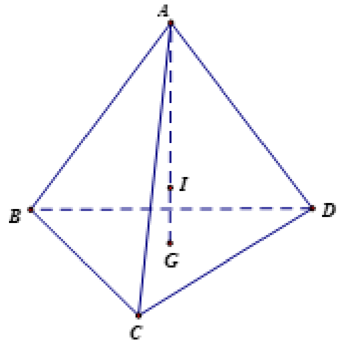


Bài 2.8 trang 58 Toán 12 Tập 1: Trong Luyện tập 8, ta đã biết trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là một điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{IG}$, ở đó G là trọng tâm của tam giác BCD. Áp dụng tính chất trên để tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là 8 cm (H.2.30).



Hình 2.30

Lời giải



Giả sử khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều được mô phỏng như hình vẽ.

G là trọng tâm DBCD, I là trọng tâm của tứ diện

Vì $ABCD$ là hình tứ diện đều nên $AG \perp (BCD)$ và $AG = 8$ cm.

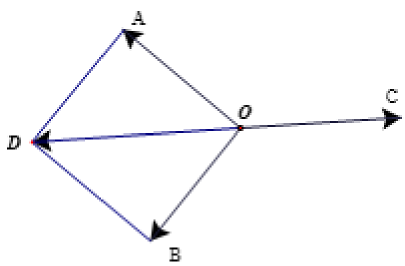
vi $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{IG}$ nên 3 điểm A, I, G thẳng hàng và $IG = \frac{1}{4}AG$.

Do đó IG $\perp$ (BCD). Khi đó $d\left(I,(BCD)\right) = IG = \frac{1}{4}AG = 2$ cm.

Bài 2.9 trang 59 Toán 12 Tập 1: Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kế được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau (H.2.31). Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao.

Hình 2.31

Lời giải



Giả sử lực kéo trên mỗi sợi dây được biểu diễn bởi các vecto $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ với là đầu chung của ba sợi dây. Khi ba sợi dậy cân bằng thì $\overrightarrow{O} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Vẽ hình bình hành OADB.

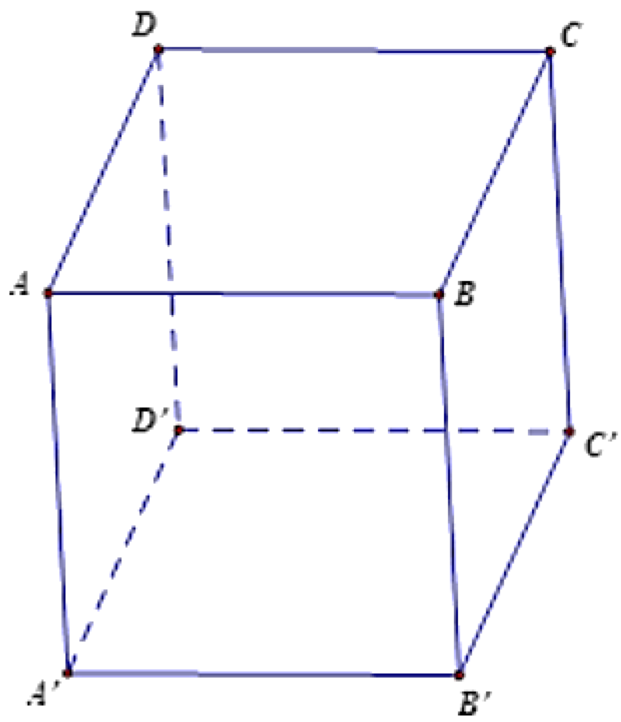
Theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

Do đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OD}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh đáy bằng 1 và độ dài mỗi cạnh bên bằng 2 . Hãy tính góc giữa các cặp vectơ sau đây và tính tích vố hướng của mỗi cập vectơ đó:

a) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$ b) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'A'}$.

Lời giải



a) Vì $AA'//CC'$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$ ngược hướng nhau.

Suy ra, $\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{C'C}\right)=180^{\circ}$.

Do đó, $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{C'C}=\left|\overrightarrow{A}\right|\cdot\left|\overrightarrow{C'C}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{C'C}\right)=2.2\cdot\cos180^{\circ}=-4$

b) Vì A'ADD' là hình chữ nhật nên $A'AD=90^{\circ}$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Do đó, $\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AD}\right)=A'AD=90^{\circ}$

Ta có: $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AA'}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AD}\right)=2\cdot1\cdot\cos90^{\circ}=0$

c) Vì A'ABB' là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{BA}$.

vì $ABCD$ là hình vuông nên $CAB=45^{\circ}$ và $AC=\sqrt{2}$

Ta có: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{B'A'}=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=-\sqrt{2}\cdot1\cdot\cos45^{\circ}=-1$

Câu 2: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai vectơ đó là 45°, hãy tính:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ b) $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$ c) $(\vec{a}+\vec{b})^2$.

Lời giải

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=1\cdot1\cdot\cos45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

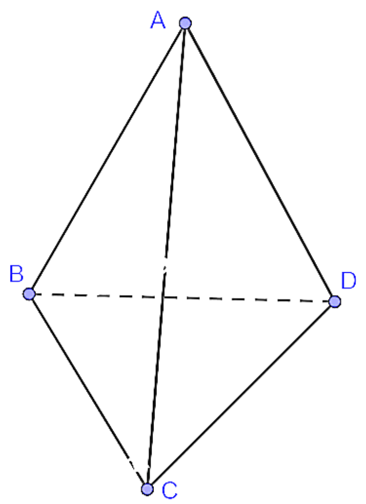
b) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}^2=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-6\cdot1=-5+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=1+2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1=2+\sqrt{2}$

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}$; b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}$ (đpcm)

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{DB}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}\right)=0$

Bài 2 – HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian, ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục.

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz.

Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục toạ độ Descartes vuông góc Oxyz,

hay đơn giản là hệ toạ độ Oxyz.

Điểm O được gọi là gốc toạ độ.

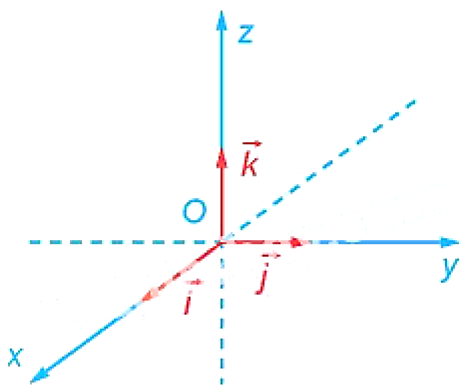
Các mặt phẳng $(Oxy),(Oyz),(Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.

Không gian với hệ toạ độ Oxyz còn được gọi là không gian Oxyz.

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Trả lời câu hỏi Hoạt động 1 trang 60 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Trong không gian, xét ba trục $\mathrm{Ox}, \mathrm{Oy}, \mathrm{Oz}$ có chung gốc O và đôi một vuông góc với nhau. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên các trục đó (H.2.35).



Hình 2.35

a) Gọi tên các mặt phẳng tọa độ có trong Hình 2.35.
b) Các mặt phẳng tọa độ trong Hình 2.35 có đôi một vuông góc với nhau không?

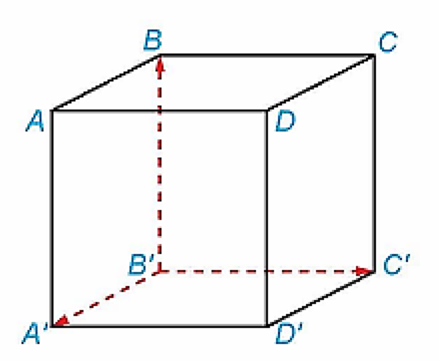
Lời giải

a) Các mặt phẳng có trong hình vẽ là: Mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx).
b) vì $Ox \perp Oy, Oy \perp Oz, Ox$ và Oz cắt nhau tại O và nằm trong mặt phẳng (Oxz) nên $Oy \perp (Oxz)$.
Mà $Oy \subset (Oxy) \Rightarrow (Oxz) \perp (Oxy), Oy \subset (Oyz) \Rightarrow (Oyz) \perp (Oxz)$

Chứng minh tương tự ta có: $(Oyz)\perp(Oxy)$

Vậy ba mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) đôi một vuông góc với nhau.

Ví dụ 1: Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.36). Có thể lập một hệ toạ độ Oxyz có gốc O trùng với đỉnh B' và các vectơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vectơ $\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{B'B}$ không? Giải thích vì sao.



Hình 2.36

Lời giải

Hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có các cạnh $B'A',B'C'$ và $B'B$ đôi một vuông góc với nhau.

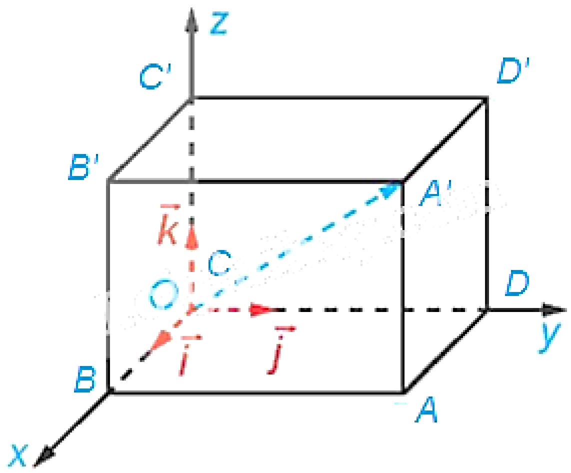
Vì hình lập phương có độ dài mỗi cạnh bằng 1 nên các vectơ $\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{B'B}$ cùng có điểm đầu là B' và đều có độ dài bằng 1.

Từ các điều trên, suy ra có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với đỉnh B' và các vectơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vectơ $\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{B'B}$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 1 trang 61 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Có thể lập một hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với đỉnh C và các vectơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt cùng hướng với các vectơ $\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CC'}$ không? Vì sao?

Lời giải



Vì $ABCD.\ A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên các cạnh CC',CB và CD đôi một vuông góc với nhau.

Các vectơ $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CC'}$ cùng có điểm đầu là C.

Do đó, suy ra có thể lập một hệ tọa độ Oxyz có gốc O trùng với đỉnh C và các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt cùng hướng với các vectơ $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CC'}$.

II. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM, TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian $Oxyz$, cho một điểm M tuỳ ý. Bộ ba số $(x;y;z)$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là toạ độ của điểm M đối với hệ toạ độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $M = (x;y;z)$ hoặc $M(x;y;z)$, trong đó x là hoành độ, y là tung độ và z là cao độ của M.

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ ả tuỳ ý. Bộ ba số $(x;y;z)$ duy nhất sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là toạ độ của vectơ a đối với hệ toạ độ Oxyz. Khi đó, ta viết $\vec{a} = (x;y;z)$ hoặc $\vec{a}(x;y;z)$.

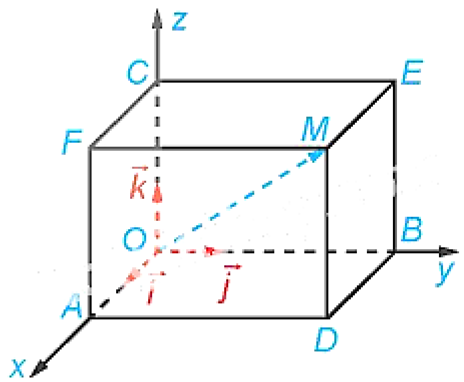
Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(x_M;y_M;z_M)$ và $N(x_N;y_N;z_N)$.

Khi đó: $\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M)$.

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Trả lời câu hỏi Hoạt động 2 trang 61 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Trong không gian Oxyz, cho một điểm M không thuộc các mặt phẳng tọa độ. Vẽ hình hộp chữ nhật OADB.CFME có ba đỉnh A, B, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz (H.2.37).



Hình 2.37

a) Hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ có bằng nhau hay không?

b) Giải thích vì sao có thể viết $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ với x, y, z là các số thực.

Lời giải

a) Vì OADB.CFME là hình hộp chữ nhật nên theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

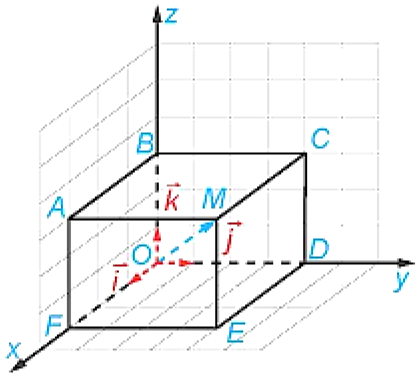
b) vì $\vec{i}$ là vectơ đơn vị trên trục Ox nên $\overrightarrow{OA} = x\vec{i}$ với x là số thực.

vì $\vec{j}$ là vectơ đơn vị trên trục Oy nên $\overrightarrow{OB} = y\vec{j}$ với y là số thực.

vì $\vec{k}$ là vectơ đơn vị trên trục Oz nên $\overrightarrow{OC} = z\vec{k}$ với z là số thực.

Do đó, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ với x,y, z là các số thực.

Ví dụ 2: Hình 2.38 minh hoạ một hệ toạ độ Oxyz trong không gian cùng với các hình vuông có cạnh bằng 1 đơn vị. Tìm toạ độ của điểm M .



Hình 2.38

Lời giải

Trong Hình 2.38, ABCM.FODE là hình hộp chữ nhật.

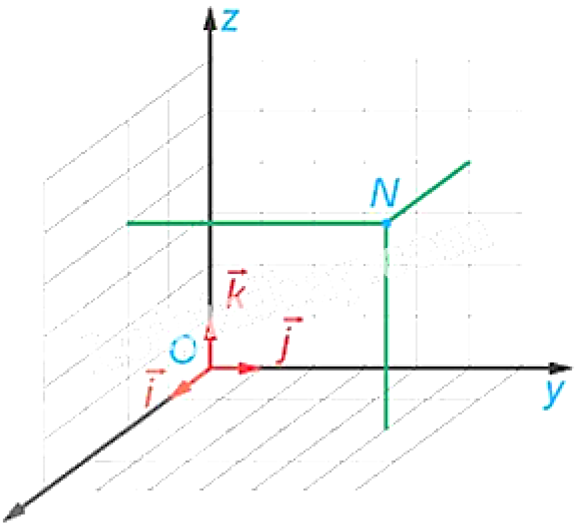
Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=3\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$$

Vì vậy, toạ độ của điểm M là $(3;4;3)$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 2 trang 62 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Tìm tọa độ của điểm N trong Hình 2.39.



Hình 2.39

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{ON}=2\vec{i}+5\vec{j}+4\vec{k}$. Do đó, N(2;5;4).

Ví dụ 3: Trong không gian Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có đỉnh A' 'trùng với gốc O và các đỉnh D', B', A lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz (H.2.40). Giả sử đỉnh C có toạ độ là $(2;3;5)$ đối với hệ toạ độ Oxyz, hãy tìm toạ độ của các đỉnh D', B', A đối với hệ tọa độ đó.

Lời giải

Vì đỉnh D' thuộc tia Ox nên hai vectơ $\overrightarrow{OD'}$ và $\vec{i}$ cùng phương, suy ra có số thực m sao cho

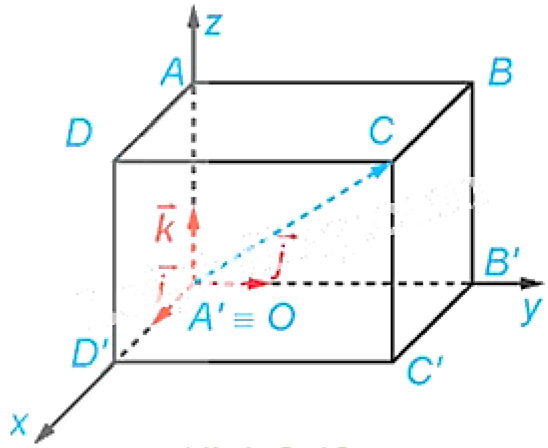
$\overrightarrow{OD'} = m\vec{i}$. Tương tự, có các số thực n, p sao cho $\overrightarrow{OB'} = n\vec{j}$ và $\overrightarrow{OA} = p\vec{k}$. Theo quy tắc hình hộp, suy ra $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OA} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ và do đó điểm C có toạ độ là $(m; n; p)$.

Mặt khác, đỉnh C có toạ độ là $(2;3;5)$ nên $m = 2, n = 3, p = 5$, tức là $\overrightarrow{OD'} = 2\vec{i}, \overrightarrow{OB'} = 3\vec{j}$ và $\overrightarrow{OA} = 5\vec{k}$.

Từ đây suy ra $D'(2;0;0), B'(0;3;0)$ và $A(0;0;5)$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 3 trang 62 SGK Toán 12 Kết nối tri thức
Trong Ví dụ 3 , hãy xác định tọa độ của các điểm B, D và C'.

Lời giải

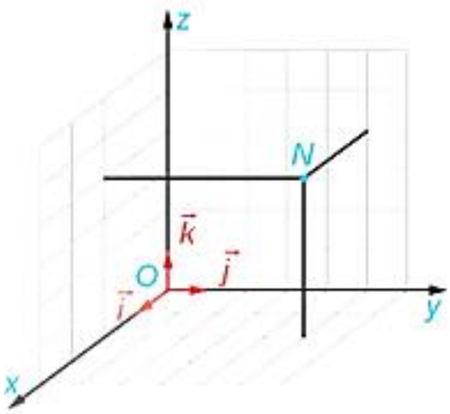


Hình 2.40

Theo Ví dụ 3 ta có: $m = 2, n = 3, p = 5$.
Vì ABB'O là hình bình hành nên $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OA} = n\vec{j} + p\vec{k} = 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Do đó, $B(0;3;5)$ Vì $OB'C'D'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{OB'} = m\vec{i} + n\vec{j} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Do đó, $C'(2;3;0)$ Vì ADD'A' là hình bình hành nên $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD'} = m\vec{i} + p\vec{k} = 2\vec{i} + 5\vec{k}$. Do đó, $D(2;0;5)$

Vận dụng 1 trang 62 Toán 12 Tập 1: Trong tình huống mở đầu, hãy chọn một hệ tọa độ phù hợp và xác định tọa độ của chiếc bóng đèn đối với hệ tọa độ đó.

Lời giải



Hình 2.34

Hệ tọa độ Oxyz có:

Mặt phẳng (Oxy) là sàn nhà, hai mặt phẳng (Oyz), (Oxz) là hai bức tường. Khi đó ba mặt phẳng đôi một vuông góc với nhau.

Gốc tọa độ O trùng với một góc phòng là giao điểm của 3 trục Ox, Oy, Oz.

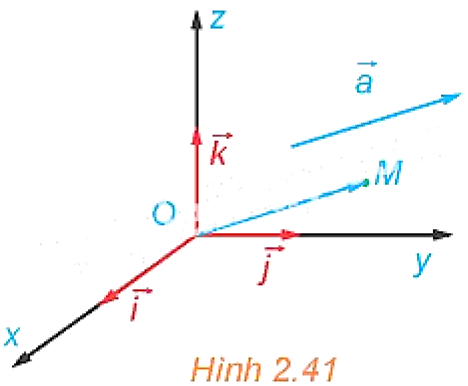
Điểm N là vị trí của đèn.

Khi đó $\overrightarrow{ON} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{i} + 1,5\vec{j} + 2\vec{k}$.

Do đó $N(1;1,5;2)$.

Trả lời câu hỏi Hoạt động 3 trang 62 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Trong không gian Oxyz, cho vectơ $\vec{a}$ tùy ý (H.2.41). Lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ và giải thích vì sao có bộ ba số ($x;y;z$) sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



Hình 2.41

Lời giải

Theo khái niệm tọa độ trong không gian ta có: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Mà $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ nên $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Do đó, có bộ ba số (x; y; z) sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Ví dụ 4: Trong không gian Oxyz, hãy tìm toạ độ của các vectơ $\vec{i}, \vec{j}$ và $\vec{k}$.

Lời giải

Vì $\vec{i} = 1\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$ nên $\vec{i} = (1;0;0)$.

Vì $\vec{j} = 0\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$ nên $\vec{j} = (0;1;0)$.

Vì $\vec{k} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 1\cdot\vec{k}$ nên $\vec{k} = (0;0;1)$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 4 trang 63 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Trong không gian Oxyz, hãy xác định tọa độ của vectơ $\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Lời giải

Tọa độ của vectơ $\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ là $(1;2;5)$.

Trả lời câu hỏi Hoạt động 4 trang 63 SGK Toán 12 Kết nối tri thức
Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $M(x;y;z)$ và $N(x';y';z')$.

a) Hãy biểu diễn hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ qua các vectơ $\vec{i},\vec{j}$ và $\vec{k}$

b) Xác định tọa độ của vectơ $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k},\overrightarrow{ON}=x'\cdot\vec{i}+y'\cdot\vec{j}+z'\cdot\vec{k}$

b) Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\left(x'\cdot\vec{i}+y'\cdot\vec{j}+z'\cdot\vec{k}\right)-\left(x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}\right)$

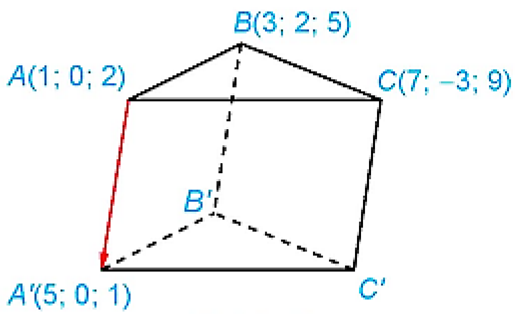
$$=(x'-x)\cdot\vec{i}+(y'-y)\cdot\vec{j}+(z'-z)\cdot\vec{k}$$

Do đó, $\overrightarrow{MN}=(x'-x;y'-y;z'-z)$.

Ví dụ 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $A(1;0;2),B(3;2;5),C(7;-3;9)$ và $A'(5;0;1)$.

a) Tìm toạ độ của $\overrightarrow{AA'}$.

b) Tìm toạ độ của các điểm B',C'.



Hình 2.42

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AA'}=(x_{A'}-x_A;y_{A'}-y_A;z_{A'}-z_A)=(4;0;-1)$.

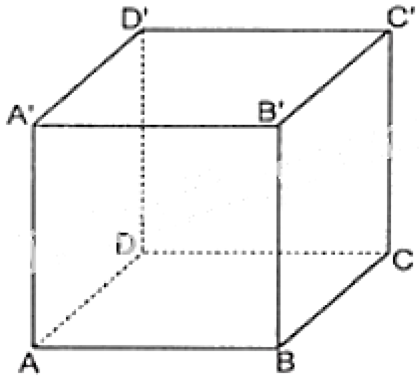
b) Gọi toạ độ của điểm B' là $(x;y;z)$ thì $\overrightarrow{BB'}=(x-3;y-2;z-5)$. Vì $ABC\cdot A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $ABB'A'$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$.

Do đó $\begin{cases}x-3=4\\y-2=0\\z-5=-1\end{cases}$ hay $x=7,y=2$ và $z=4$. Vậy $B'(7;2;4)$.

Lập luận tương tự suy ra $C'(11;-3;8)$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 5 trang 64 SGK Toán 12 Kết nối tri thức
Trong Ví dụ 5, xác định tọa độ của các điểm D và D' sao cho $ABCD\cdot A'B'C'D'$ là hình hộp.

Lời giải



Gọi tọa độ của điểm D là (x; y;z), tọa độ của D′ là $(x';y';z')$,

khi đó $\overrightarrow{AD}(x-1;y;z-2)$ và $\overrightarrow{A'D'}(x-5;y;z-1)$.

Để $ABCD\cdot A'B'C'D'$ là hình hộp thì $ABCD$ là hình bình hành.

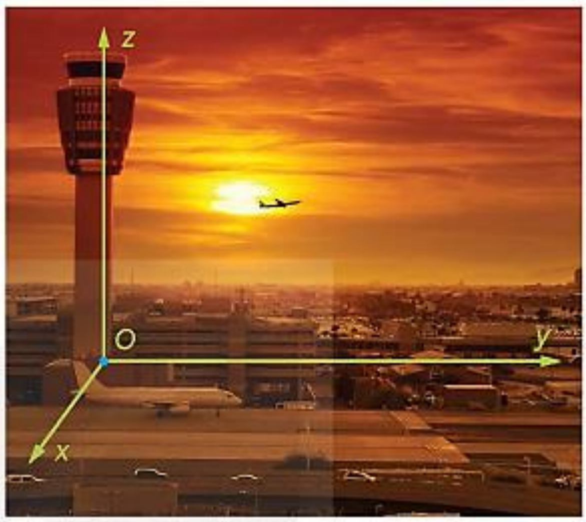
Do đó, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow\begin{cases}x-1=4\\y=-5\\z-2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=-5\\z=6\end{cases}$. Suy ra $D(5;-5;6)$

Để ABCD. $A'B'C'D'$ là hình hộp thì $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Do đó, $\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{B'C'}\Rightarrow\begin{cases}x-5=4\\y=-5\\z-1=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\y=-5\\z=5\end{cases}$. Suy ra $D'(9;-5;5)$

Trả lời câu hỏi Vận dụng 2 trang 64 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Để theo dõi hành trình của một chiếc máy bay, ta có thể lập hê tọa độ Oxyz có gốc O trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, măt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là mặt phẳng) với trục Ox hướng vế phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng lên trên trời (H.2.43). Sau khi cất cánh và đạt đồ cao nhất định, chiếc máy bay duy trì hướng bay về phía nam với tốc độ không đổi là 890 km / h trong nửa giờ. Xác đinh tọa độ của vectơ biểu diến độ dịch chuyên của chiếc máy bay trong nửa giờ đó với hệ tọa độ đã chọn, biết rằng đơn vị đo trong không gian Oxyz được lấy theo kilômêt.



Hình 2.43

Lời giải

Quãng đường máy bay bay được với vận tốc $890\ \text{km/h}$ trong nửa giờ là: $890.\frac{1}{2}=445(\ \text{km})$ Vì máy bay duy trì hướng bay về phía nam nên tọa độ của vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của chiếc máy bay trong nửa giờ đó với hệ tọa độ đã chọn là $(0;445;0)$.

III. GIẢI BÀI TẬP SGK

Bài 1:

Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đều khác $\vec{0}$ và có giá đôi một vuông góc.

Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) Có thể lập được một hệ tọa độ $Oxyz$ có các trục tọa độ lần lượt song song với giá của các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

b) Có thể lập được một hệ tọa độ Oxyz có các trục tọa độ lần lượt trùng với giá của các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

c) Có thể lập được một hệ tọa độ Oxyz có các vectơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt bằng các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

d) Có thể lập được một hệ tọa độ Oxyz có các vectơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt cùng phương các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Lời giải

Cả 4 Câu đều đúng.

Bài 2: Hãy mô tả hệ tọa độ Oxyz trong căn phòng ở Hình 2.44 sao cho gốc O trùng với góc trên của căn phòng, khung tranh nằm trong mặt phẳng (Oxy) và mặt trần nhà trùng với mặt phẳng (Oxz).

Hình 2.44

Lời giải

Hình vẽ phù hợp với mô tả:

Bài 3:

Trong không gian Oxyz, xác định tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $A(0;0;0)$ và $B(4;2;-5)$; b) $A(1;-3;7)$ và $B(1;-3;7)$; c) $A(5;4;9)$ và $B(-5;7;2)$.

Lời giải

a) $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)=(4;2;-5)$

b) $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)=(0;0;0)$

c) $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)=(-10;3;-7)$

Bài 4:

Trong không gian Oxyz, xác định tọa độ của điểm A trong mỗi trường hợp sau:

a) A trùng với gốc tọa độ;

b) A nằm trên tia Ox và $OA=2$;

c) A nằm trên tia đối của tia Oy và $OA=3$.

Lời giải

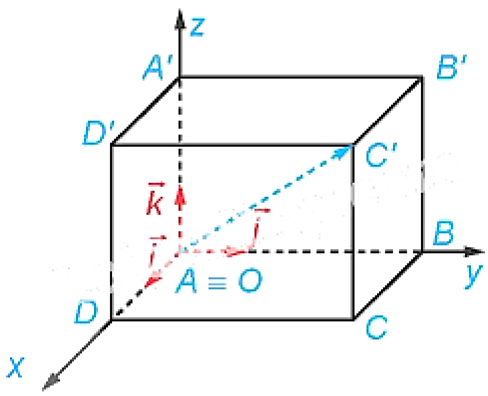
a) A trùng với gốc tọa độ nên A(0; 0;0).

b) Vì A nằm trên tia Ox và $OA=2$ nên $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}$. Do đó, A(2;0;0).

c) vì A nằm trên tía đối của tia Oy và $OA=3$ nên $\overrightarrow{OA}=-3\vec{j}$. Do đó, $A(0;-3;0)$.

Bài 5:

Trong không gian Oxyz, cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có đỉnh A trùng với gốc O và các đỉnh D, B, A' có tọa độ lần lượt là (2; 0; 0), (0; 4; 0), (0; 0; 3) (H.2.45). Xác định tọa độ của các đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật.



Hình 2.45

Lời giải

Vì A trùng gốc O nên $A(0;0;0)$.

Vì D thuộc tia Ox nên hai vectơ $\overrightarrow{OD}$ và $\vec{i}$ cùng hướng. Do đó, tồn tại số thực m sao cho $\overrightarrow{OD}=m\vec{i}$. Mà D(2;0; 0) nên $m=2$.

Vì B thuộc tia Oy nên hai vectơ $\overrightarrow{OB}$ và $\vec{j}$ cùng hướng. Do đó, tồn tại số thực n sao cho $\overrightarrow{OB}=n\vec{j}$.Mà$B(0;4;0)$ nên $n=4$

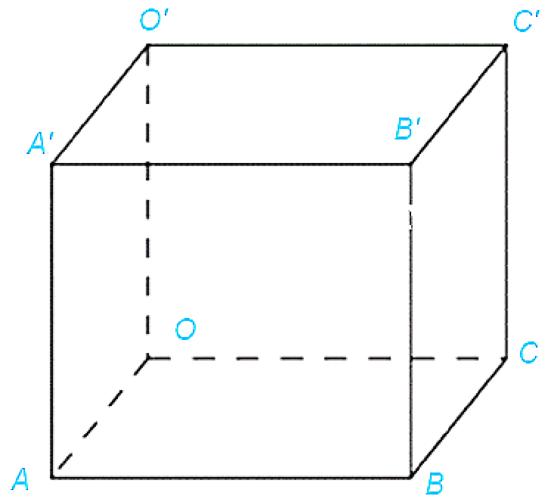
Vì A' thuộc tia Oz nên hai vectơ $\overrightarrow{OA'}$ và $\vec{k}$ cùng hướng. Do đó, tồn tại số thực p sao cho $\overrightarrow{OA'} = p\vec{k}$. Mà A′(0; 0; 3) nên $p = 3$.

Vì $ODCB$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = m\vec{i} + n\vec{j} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$. Do đó, C(2;4;0).
Ví $OA'B'B$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB} = p\vec{k} + n\vec{j} = 3\vec{k} + 4\vec{j}$. Do đó, B'(0; 4; 3).
Vì OA'D'D là hình bình hành nên $\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OD} = m\vec{i} + p\vec{k} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$. Do đó, D'(2; 0; 3).
Vì $ABCD.\ A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên theo quy tắc hình hộp ta có:

$$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA'} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}.$$ Do đó, $C'(2;4;3)$.

Bài 6: Trong không gian Oxyz, cho hình hộp OABC. O' $A'B'C'$ có $A(1;1;-1), B(0;3;0), C'(2;-3;6)$.
a) Xác định tọa độ của điểm C.
b) Xác định các tọa độ đỉnh còn lại của hình hộp.

Lời giải



a) Ta có: O(0;0;0)
vì $OABC \cdot O'A'B'C'$ là hình hộp nên $AOBC$ là hình bình hành. Do đó:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \begin{cases} x_A = x_B - x_C \\ y_A = y_B - y_C \\ z_A = z_B - z_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = x_A - x_B = 1 \\ y_C = y_A - y_B = -2 \Rightarrow C(1;-2;-1) \\ z_C = z_A - z_B = -1 \end{cases}$$

b) Vì OABC.O'A'B'C' là hình hộp nên

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow \begin{cases} x_{O'} = x_{C'} - x_C = 1 \\ y_{O'} = y_{C'} - y_C = -1 \Rightarrow O'(1;-1;7) \\ z_{O'} = z_{C'} - z_C = 7 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} - x_A = x_{C'} - x_C = 1 \\ y_{A'} - y_A = y_{C'} - y_C = -1 \Rightarrow \\ z_{A'} - z_A = z_{C'} - z_C = 7 \end{cases} \begin{cases} x_{A'} = 2 \\ y_{A'} = 0 \Rightarrow A'(2;0;6) \\ z_{A'} = 6 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow \begin{cases} x_{B'} - x_B = \left(x_{C'} - x_C\right) = 1 \\ y_{B'} - y_B = \left(y_{C'} - y_C\right) = -1 \\ z_{B'} - z_B = \left(z_{C'} - z_C\right) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{B'} = 1 \\ y_{B'} = 2 \\ z_{B'} = 7 \end{cases}$$

Bài 7: Trong Vận dụng 2, hãy giải thích vì sao tại mỗi thời điểm chiếc máy bay di chuyển trên đường băng thì tọa độ của nó luôn có dạng (x; y; 0) với x, y là hai số thực nào đó.

Lời giải

Khi máy bay di chuyển trên đường băng tức là máy bay di chuyển ở trên mặt đất,tức là thuộc mặt phẳng (Oxy). Do đó máy bay khi di chuyển trên đường băng thì tọa độ của nó luôn có dạng (x; y; 0) với x, y là hai số thực nào đó.

Bài 3 – BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

I. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTO, PHÉP TRỪ HAI VECTƠ, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = \left(x; y; z\right)$ và $\vec{b} = \left(x'; y'; z'\right)$. Ta có:

$\vec{a} + \vec{b} = \left(x + x'; y + y'; z + z'\right);$

$\vec{a}-\vec{b}=\left(x-x';y-y';z-z'\right)$;

$k\vec{a}=\left(kx;ky;kz\right)$ với k là một số thực.

Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A\left(x_A;y_A;z_A\right),B\left(x_B;y_B;z_B\right)$ và $C\left(x_C;y_C;z_C\right)$. Khi đó:

Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$;

Toạ độ trọng tâm của tam giác ABC là $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$.

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Trả lời câu hỏi Hoạt động 1 trang 67 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a}=\left(1;0;5\right)$ và $\vec{b}=\left(1;3;9\right)$.

a) Biểu diễn hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ qua các vectơ đơn vị $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

b) Biểu diễn hai vectơ $\vec{a}+\vec{b}$ và $2\vec{a}$ qua các vectơ đơn vị $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, từ đó xác định tọa độ của hai vectơ đó.

Lời giải

a) Ta có: $\vec{a}=\left(1;0;5\right)=\vec{i}+5\vec{k};\vec{b}=\left(1;3;9\right)=\vec{i}+3\vec{j}+9\vec{k}$.

b) Ta có: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{i}+5\vec{k}+\vec{i}+3\vec{j}+9\vec{k}=2\vec{i}+3\vec{j}+14\vec{k}$. Do đó, $\vec{a}+\vec{b}=\left(2;3;14\right)$

$$2\vec{a}=2\left(\vec{i}+5\vec{k}\right)=2\vec{i}+10\vec{k}.\text{ Do đó}, 2\vec{a}=\left(2;0;10\right)$$

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=\left(2;1;5\right)$ và $\vec{b}=\left(2;2;1\right)$. Tìm toạ độ của mỗi vectơ sau:

a) $\vec{a}-\vec{b}$; b) $3\vec{a}+2\vec{b}$.

Lời giải

a) Vì $\vec{a}=\left(2;1;5\right)$ và $\vec{b}=\left(2;2;1\right)$ nên $\vec{a}-\vec{b}=\left(2-2;1-2;5-1\right)=\left(0;-1;4\right)$.

b) Ta có $3\vec{a}=\left(3\cdot2;3\cdot1;3\cdot5\right)=\left(6;3;15\right)$ và $2\vec{b}=\left(2\cdot2;2\cdot2;2\cdot1\right)=\left(4;4;2\right)$.

Do đó $3\vec{a}+2\vec{b}=\left(6+4;3+4;15+2\right)=\left(10;7;17\right)$.

Trả lời Luyện tập 1 trang 68 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ $\vec{u}=\left(1;8;6\right),\vec{v}=\left(-1;3;-2\right)$ và $\vec{w}=\left(0;5;4\right)$. Tìm tọa độ của vecto $\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$

Lời giải

$\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}=(1;8;6)-2(-1;3;-2)+(0;5;4)=(1+2;8-6+5;6+4+4)=(3;7;14)$

Trả lời Hoạt động 2 trang 68 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có $A(x_A;y_A;z_A), B(x_B;y_B;z_B)$ và $C(x_C;y_C;z_C)$.

a) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tìm tọa độ của M theo tọa độ của A và B.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm tọa độ của G theo tọa độ của A và B và C.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{OA}=(x_A;y_A;z_A), \overrightarrow{OB}=(x_B;y_B;z_B), \overrightarrow{OC}=(x_C;y_C;z_C)$

a) Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\Rightarrow\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}\\ z_M=\dfrac{z_A+z_B}{2}\end{cases}$.

Do đó, $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

b) Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$

$\Rightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\end{cases}$. Do đó, $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$.

Ví dụ 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3), B(3;2;1)$ và $C(2;-1;5)$. Tìm toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải

Vì M là trung điểm của đoạn thẳng AB nên toạ độ của điểm M là $\left(\frac{1+3}{2};\frac{2+2}{2};\frac{3+1}{2}\right)$,

suy ra $M(2;2;2)$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên toạ độ của điểm G là $\left(\frac{1+3+2}{3};\frac{2+2+(-1)}{3};\frac{3+1+5}{3}\right)$,

suy ra $G(2;1;3)$.

Trả lời Luyện tập 2 trang 69 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(2;9;-1), B(9;4;5)$ và $G(3;0;4)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC nhận G là trọng tâm.

Lời giải

Để G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B = 3.3 - 2 - 9 = -2 \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B = 3.0 - 9 - 4 = -13 \\ z_C = 3z_G - z_A - z_B = 3.4 + 1 - 5 = 8 \end{cases}$$

Vậy $C(-2;-13;8)$

II. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$ được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'$$

Chú ý: Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$

thì $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Đặc biệt, khi B trùng O ta nhận được công thức $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$.

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

HĐ3 trang 69 Toán 12 Tập 1: Trong không gian Oxyz,

cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$

a) Giải thích vì sao $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$.

b) Sử dụng biểu diễn $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ để tính các tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{i}, \vec{a} \cdot \vec{j}$ và $\vec{a} \cdot \vec{k}$.

c) Sử dụng biểu diễn $\vec{b} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ để tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Lời giải

a) Cobii = Fit $^2 = 1$.

Vì $\overline{\mathrm{i}} \perp \overline{\mathrm{j}}$ và $\overline{\mathrm{i}} \perp \vec{\mathrm{k}}$ nên $\overline{\mathrm{ii}}\,\overline{\mathrm{iii}} = 0$.

b) Có $\vec{\mathrm{a}} = \left(x\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{y}\vec{\mathrm{j}} + z\vec{\mathrm{k}}\right)\vec{\mathrm{i}} = x\mathrm{x}^2 + y\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{z}\vec{\mathrm{k}}\vec{\mathrm{i}} = x$.

$\vec{a}.\vec{j}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\vec{j}=x\vec{i}.\vec{j}+y^2+z\vec{k}\cdot\vec{j}=y$.

$\vec{a}\vec{k}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\vec{k}=x\vec{i}\vec{k}+y\vec{j}\vec{k}+z\vec{k}^2=z$.

c) $\vec{a}.\vec{b}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\cdot\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$

$$=x\cdot x'\vec{i}^2+y\cdot y'\cdot\vec{j}^2+z\cdot z'\vec{k}^2+\left(x\cdot y'+yx'\right)\vec{i}\cdot\vec{j}+\left(x\cdot z'+zx'\right)\vec{i}\vec{k}+\left(yz'+z\cdot y'\right)\cdot\vec{j}\vec{k}$$

$=\mathrm{x}\cdot\mathrm{x}'+\mathrm{y}\cdot\mathrm{y}'+\mathrm{zz}'$.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;4;2)$ và $\vec{b}=(-4;1;0)$.

a) Tính $\vec{a}\cdot\vec{b}$ và cho biết hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có vuông góc với nhau hay không.

b) Tính độ dài của vectơ $\vec{a}$.

Lời giải

a) Ta có: $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-4)+4\cdot1+2\cdot0=0$. Do đó, hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau.

b) Độ dài của vectơ ả là $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+4^2+2^2}=\sqrt{21}$.

Luyện tập 3 trang 69 Toán 12 Tập 1: Trong Ví dụ 3, tính $(\vec{a}+\vec{b})^2$.

Lời giải

Ta có $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$

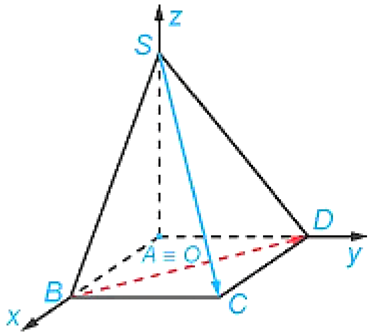
Theo ví dụ 3, có $\vec{a}\cdot\vec{b}=0;|\vec{a}|=\sqrt{21}$.

Ta có $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$.

Do đó $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=21+2.0+17=38$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Giả sử $SA=2, AB=3,\ AD=4$. Xét hệ toạ độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox,Oy,Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS (H.2.48).

a) Xác định toạ độ của các điểm S,A,B,C,D. b) Tính BD và SC. c) Tính $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}\right)$.



Hình 2.48

Lời giải

a) Vì A trùng gốc toạ độ nên $A(0;0;0)$. Vì B thuộc tia Ox và $AB = 3$ nên $B(3;0;0)$. Vì D thuộc tia Oy và $AD = 4$ nên $D(0;4;0)$. Vì S thuộc tia Oz và $AS = 2$ nên $S(0;0;2)$. Vì hình chiếu của C lên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là B, D, A nên $C(3;4;0)$.

b) Ta có $\overrightarrow{BD} = (0-3;4-0;0-0) = (-3;4;0)$, suy ra $BD = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} = 5$.

Ta có $\overrightarrow{SC} = (3-0;4-0;0-2) = (3;4;-2)$, suy ra $SC = \left|\overrightarrow{SC}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$.

c) Ta có $\cos\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{SC}}{\left|\overrightarrow{BD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SC}\right|} = \dfrac{(-3)\cdot 3 + 4\cdot 4 + 0\cdot(-2)}{5\sqrt{29}} = \dfrac{7}{5\sqrt{29}}$, suy ra $\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}\right) \approx 74{,}9^\circ$.

Luyện tập 4 trang 70 Toán 12 Tập 1: Trong không gian Oxyz,

cho A(0;2;1), B(3;-2;1) và C(-2;5;7).

a) Tính chu vi của tam giác ABC.

b) Tính BAC.

Lời giải

Có $\overrightarrow{AB} = (3;-4;0); \overrightarrow{AC} = (-2;3;6); \overrightarrow{BC} = (-5;7;6)$.

a) Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9+16} = 5; \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4+9+36} = 7; \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{25+49+36} = \sqrt{110}$.

Do đó chu vi của tam giác ABC là: $5 + 7 + \sqrt{110} = 12 + \sqrt{110}$.

b) Ta có $BAC = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{3\cdot(-2) + (-4)\cdot 3 + 0.6}{5.7} = -\dfrac{18}{35}$.

Suy ra $BAC \approx 121^\circ$.

III. VẬN DỤNG TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Ví dụ 5: Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?

Hình 2.49

Lời giải

Gọi $C(x;y;z)$ là vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB = 2BC$.

Do đó $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{940-800}{2};\frac{550-500}{2};\frac{8-7}{2}\right) = (70;25;0,5)$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BC} = (x-940;y-550;z-8)$ nên $\begin{cases} x-940=70 \\ y-550=25 \\ z-8=0,5. \end{cases}$

Từ đó $\begin{cases} x=1010 \\ y=575 \\ z=8,5 \end{cases}$ và vì vậy $C(1010;575;8,5)$.

Vậy toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(1010;575;8,5)$.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 5 trang 76 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Với các giả thiết như trong Ví dụ 5, hãy xác định tọa độ của các chiếc máy bay sau 10 phút tiếp theo (tính từ thời điểm máy bay ở điểm B).

Lời giải

Gọi D(x ; y; z) là vị trí của máy bay sau 10 phút bay tiếp theo (tính từ thời điểm máy bay ở điểm B). Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng. Do vận tốc máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B bằng thời gian bay từ B đến D nên $AB = BD$. Do đó, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} = (140;50;1)$.

Mặt khác: $\overrightarrow{BD} = (x-940;y-550;z-8)$ nên $\begin{cases} x-940=140 \\ y-550=50 \\ z-8=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1080 \\ y=600 \\ z=9 \end{cases}$

Vậy D(1 080; 600; 9). Vậy tọa độ của máy bay trong 10 phút tiếp theo là (1080; 600; 9).

Ví dụ 6: Hãy trả lời câu hỏi trong tình huống mở đầu.

Giải. Vì điểm A' có toạ độ là $(240;450;0)$ nên khoảng cách từ A' đến các trục Ox, Oy lần lượt là 450 cm và 240 cm. Suy ra $A'A = 450$ cm và $A'O' = 240$ cm. Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{A'B'} = (-120;0;300)$, do đó $A'B' = \left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \sqrt{(-120)^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323(\text{ cm})$.

Vì $O'O = A'A = 450$ cm và O' nằm trên trục Oy nên toạ độ của điểm O' là $(0;450;0)$.

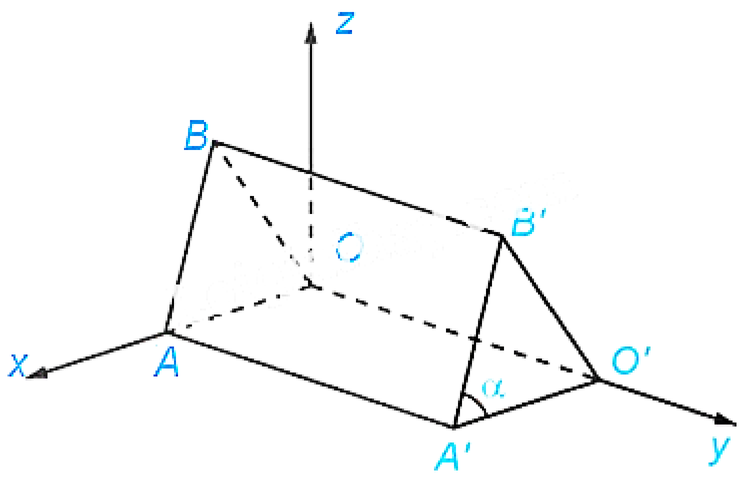
Do đó $\overrightarrow{O'B'} = (120;0;300)$ và $O'B' = \left|\overrightarrow{O'B'}\right| = \sqrt{120^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323(\text{ cm})$.

Vậy mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là 450 cm, chiều rộng là 240 cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là 323 cm.

Trả lời câu hỏi Luyện tập 6 trang 71 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Trong tình huống mở đầu, hãy tính độ lớn của góc α.

Lời giải



Theo Ví dụ 6 ta có: $\overrightarrow{A'B'} = (-120;0;300); \left|\overrightarrow{A'B'}\right| = 60\sqrt{29}cm, O'(0;450;0), A'(240;450;0)$

Do đó, $\overrightarrow{A'O'} = (-240;0;0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{A'O'}\right| = 240$ cm

Ta có: $\cos\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'O'}\right) = \dfrac{\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'O'}}{\left|\overrightarrow{A'B'}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A'O'}\right|} = \dfrac{(-120)(-240)+0.0+300.0}{60\sqrt{29}.240} = \dfrac{2\sqrt{29}}{29}$

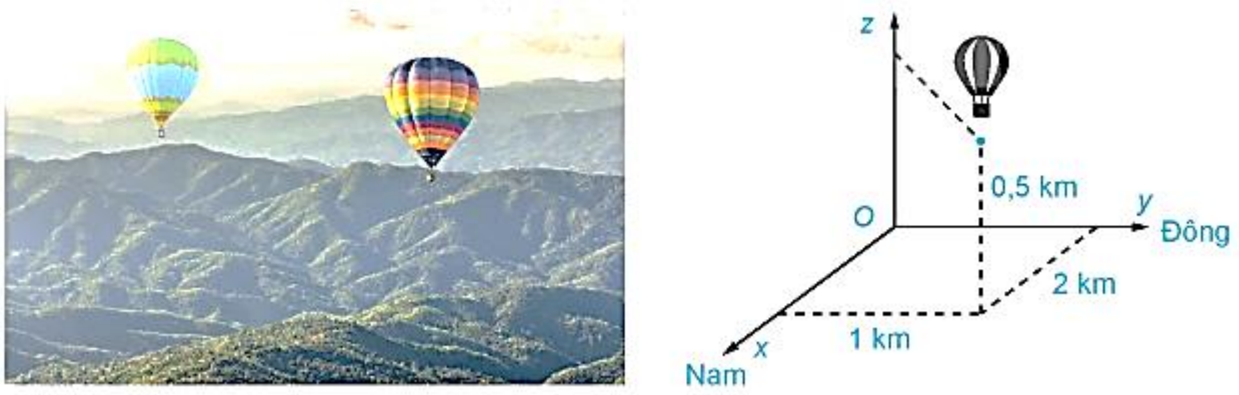
$\Rightarrow B'A'O' \approx 68^0$. Vậy $\alpha \approx 68^0$

Ví dụ 7: Hai chiếc kHình khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,5$ km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và $1,5$ km về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,8$ km.

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai kHình khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (H.2.50), đơn vị đo lấy theo kilômét.

a) Tìm toạ độ của mỗi chiếc kHình khí cầu đối với hệ tọa độ đã chọn.

b) Xác định khoảng cách giữa hai kHình khí cầu (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Hình 2.50

Lời giải

a) Chiếc kHình khí cầu thứ nhất và thứ hai có toạ độ lần lượt là $(2;1;0,5)$ và $(-1;-1,5;0,8)$.

b) Khoảng cách giữa hai chiếc kHình khí cầu là

$$\sqrt{(-1-2)^2+(-1,5-1)^2+(0,8-0,5)^2}=\sqrt{15,34}\approx 3,92(\text{ km}).$$

Trả lời câu hỏi Luyện tập 7 trang 72 SGK Toán 12 Kết nối tri thức

Trong Ví dụ 7, khinh khí cầu thứ nhất hay thứ hai ở xa điểm xuất phát hơn? Giải thích vì sao.

Lời giải

Theo Ví dụ 7 ta có, khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ là $\mathrm{A}(2;1;0,5)$, khinh khí cầu thứ hai có tọa độ là $B(-1;-1,5;0,8)$.

Ta có: $OA=\sqrt{2^2+1^2+0,5^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}km, OB=\sqrt{(-1)^2+(-1,5)^2+0,8^2}=\dfrac{\sqrt{389}}{10}$ km.

Vì gốc O đặt tại điểm xuất phát và $OA>OB$ nên khinh khí cầu thứ hai gần điểm xuất phát hơn.

IV. GIẢI BÀI TẬP SGK

Bài 1: Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a}=(3;1;2)$, $\vec{b}=(-3;0;4)$ và $\vec{c}=(6;-1;0)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ và $2\vec{a}-3\vec{b}-5\vec{c}$.

b) Tính các tích vô hướng $\vec{a}\cdot(-\vec{b})$ và $(2\vec{a})\cdot\vec{c}$.

Lời giải

a) Tọa độ của vectơ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ là $(3-3+6;1+0-1;2+4+0)=(6;0;6)$.

Có $2\vec{a}=(6;2;4);3\vec{b}=(-9;0;12);5\vec{c}=(30;-5;0)$.

Tọa độ của vectơ $2\vec{a}-3\vec{b}-5\vec{c}$ là $(6+9-30;2+5;4-12)=(-15;7;-8)$.

b) Có $-\vec{b}=(3;0;-4)$.

Do đó $\vec{a}\cdot(-\vec{b})=3.3+1.0+2\cdot(-4)=1$.

$(2\vec{a})\cdot\vec{c}=6.6+2\cdot(-1)+4.0=34$.

Bài 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(-4;3;3), N(4;-4;2)$ và $P(3;\ 6;-1\ )$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}$, từ đó chứng minh rằng ba điểm M, N, P không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}$, từ đó suy ra tọa độ của điểm Q sao cho tứ giác MNPQ là hình bình hành.

c) Tính chu vi của hình bình hành MNPQ.

Lời giải

a) MN - $(4+4;-4-3;2-3)-(8;-7;-1), MP$ - $(3+4;6-3;-1-3)-(7;3;-4)$.

Hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ không cùng phương nên ba điểm M_2 N,P không thẳng hàng.

b) Có $\overline{NM}-(-8;7;1)$ và $\overline{NP}-(-1;10;-3)$.

Suy ra $\overline{NM}+\overline{NP}=(-8-1;7+10;1-3)=(-9;17;-2)(1)$.

Theo quy tắc hình bình hành có: $\overline{NM}+\overline{NP}=\overline{NQ}$ (2).

Gọi $Q(x,y;z)$. Khi đó $\overline{NQ}=(x-4;y+4;z-2)(3)$.

Từ (1), (2), (3), ta có: $\begin{cases}x-4--9\\y+4-17\\z-2--2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\y-13\\z-0\end{cases}$.

Vạyy $Q(-5;13;0)$.

c) Có $\overline{MN}=(8;-7;-1)=\left|\overline{MN}\right|=\sqrt{14}$;

$\overline{NP}=(-1;10;-3)=\left|\sqrt{NP}\right|=\sqrt{10}$;

Do đò chu vi hình bình hành là: $2\left(\left|\overrightarrow{MN}\right|+\left|NP\right|\right)-2\left(\sqrt{14}+\sqrt{110}\right)$.

Bài 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;1), B(0;-3;1)$ và $C(4;-1;4)$.

a) Tim tọa độ trọng tâm của tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng $BAC=90^\circ$.

c) Tính ABC.

Lời giải

a) Gọi $G(x;y;z)$ là trọng tâm của tam giác ABC.

Khi đó ta có $\begin{cases} x=\dfrac{1+0+4}{3} \\ y=\dfrac{0-3-1}{3} \\ z=\dfrac{1+1+4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{-4}{3} \\ z=2 \end{cases}$.

Vậy $G\left(\dfrac{5}{3};-\dfrac{4}{3};2\right)$.

b) Có $\overrightarrow{AB}=(0-1;-3-0;1-1)=(-1;-3;0)$; $\overrightarrow{AC}=(4-1;-1-0;4-1)=(3;-1;3)$.

иl $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\cdot 3+(-3)\cdot(-1)+0.3=0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ hay $BAC=90^\circ$.

c) Có $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=(1;3;0)$; $\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$;

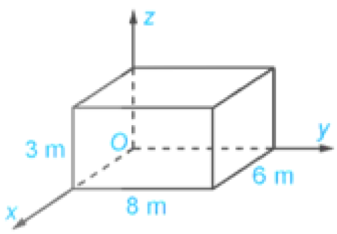
$\overrightarrow{BC}=(4-0;-1+3;4-1)=(4;2;3)$; $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{16+4+9}=\sqrt{29}$.

Ta có $ABC=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$.

Có $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{1.4+3.2+0.3}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{29}}=\dfrac{\sqrt{290}}{29}$.

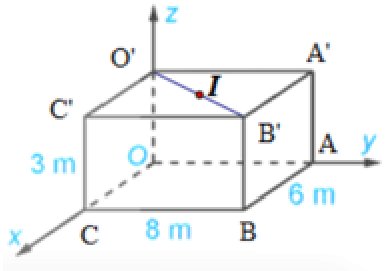
Do đó $ABC\approx 54^\circ$.

Bài 4: Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (H.2.51). Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn.



Hình 2.51

Lời giải



Giả sử căn phòng hình hộp chữ nhật được mô phỏng như hình vẽ.

Khi đó ta có B' $(6;8;3)$ và $O'(0;0;3)$.

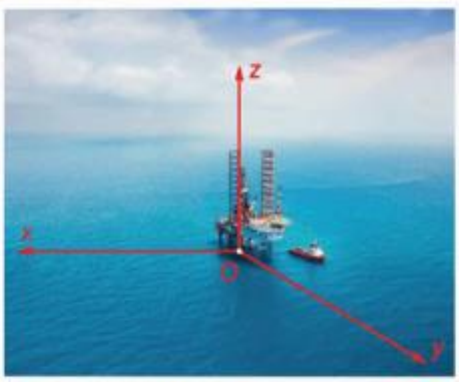
Gọi I là điểm chính giữa trần nhà của phòng học.

Vì O'A'B'C' là hình chữ nhật nên I là trung điểm của O'B'.

Do đó $\begin{cases} x_I = \dfrac{6+0}{2} \\ y_I = \dfrac{8+0}{2} \\ z_I = \dfrac{3+3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 3 \\ y_I = 4 \\ z_I = 3 \end{cases}$.

Vậy tọa độ điểm treo đèn là $(3;4;3)$.

Bài 5: Trong không gian, xét hệ tọa độ Oxyz có gốc O trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (H.2.52). Đơn vị đo trong không gian Oxyz lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan có phạm vi theo dõi là 30 km. Hỏi ra đa có thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có tọa độ là $(25;15;-10)$ đối với hệ tọa độ nói trên hay không? Hãy giải thích vì sao.



Hình 2.52

Lời giải

Để xác định xem ra đa có thể phát hiện được tàu thám hiểm hay không, ta cần xác định khoảng cách giữa ra đa và tàu thám hiểm.

Theo đề ta có tọa độ của ra đa là $(0;0;0)$, tọa độ của tàu thám hiểm là $(25;15;-10)$.

Khi đó khoảng cách giữa ra đa và tàu thám hiểm là:

$$d=\sqrt{(25-0)^2+(15-0)^2+(-10-0)^2}=5\sqrt{38}\approx 30,82.$$

Vi phạm vi theo dõi của ra đa là 30 km mà khoáng khoảng cách giữa ra đa và tàu thám hiếm là 30,82 km nên ra đa không phát hiện được tàu thám hiếm.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G là trọng tâm của tam giác BC**D.** Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\vec{0}$.

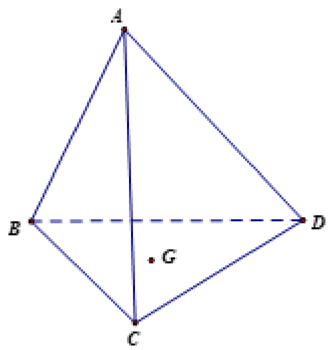
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

C. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BG}$.

D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Lời giải

Đáp án đúng là: D



Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Do đó đáp án A đúng.

Có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{AG}$

ví $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Do đó đáp án B đúng.

Có $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{BG}$.

ví $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{GB}$

Do đó đáp án C đúng.

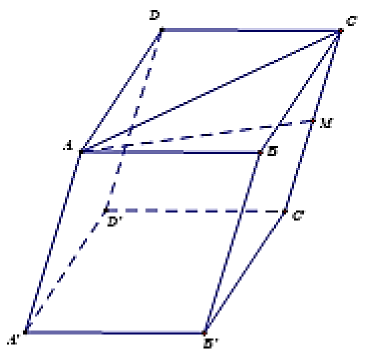
Bài 2: Cho hình hộp ABC**D.**A'B'C'D'. Lấy M là trung điểm của đoạn thẳng CC'.

Vectơ $\overrightarrow{AM}$ bằng

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$
C. $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.
D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$

Lời giải

Đáp án đúng là B



Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$.

Vì M là trung điểm của CC' nên $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

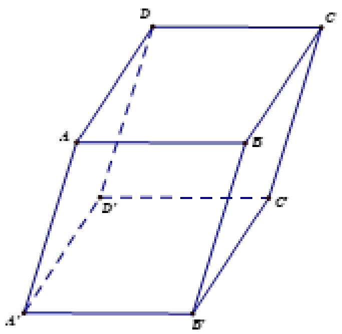
Do đó $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

Bài 3: Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D'. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB'}$.
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$
C. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AD'}$.
D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$.

Lời giải

Đáp án đúng là: D



Vì ABCD.A'B'C'D' là hình hộp nên theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

Do đó đáp án B đúng.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB'}$(ví $\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$).

Do đó đáp án A đúng.

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AD'}$(ví $\overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{BB'} = \vec{0}$).

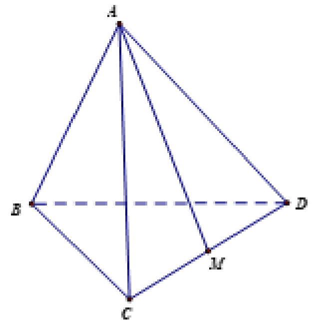
Do đó đáp án C đúng.

Bài 4: Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a, gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CD. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ bằng

A. $\frac{a^2}{4}$. **B.** $\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2}{3}$. **D.** a^2.

Lời giải

Đáp án đúng là B



Vì M là trung điểm của đoạn thẳng CD nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$.

Bài 5: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (1; -2; 2), \vec{b} = (-2; 0; 3)$.

Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $\vec{a} + \vec{b} = (-1; -2; 5)$ **B.** $\vec{a} - \vec{b} = (3; -2; -1)$.
C. $3\vec{a} = (3; -2; 2)$. **D.** $2\vec{a} + \vec{b} = (0; -4; 7)$.

Lời giải

Đáp án đúng là C

$\bar{a} + \vec{b} = (1 - 2; -2 + 0; 2 + 3) = (-1; -2; 5)$.

$\bar{a} - \bar{b} - (1 + 2; -2 - 0; 2 - 3) - (3; -2; -1)$.

$3\vec{a} - (3; -6; 6)$.

$2\bar{a} + \bar{b} = (2 - 2; -4 + 0; 4 + 3) = (0; -4; 7)$.

Do đỏ đáp ản C sai.

Bài 6: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-1;0;3)$, B$(2;1;-1)$ và. Tọa độ của điểm D là:

A. $(2;-1;0)$. **B.** $(0;-1;-6)$. **C.** $(0;1;6)$. **D.** $(-2;1;0)$.

Lời giải

Đáp án đúng là C

Gọi $D(x;y;z)$.

vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (3;1;-4)=(3-x;2-y;2-z)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x=3 \\ 2-y=1 \\ 2-z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=6 \end{cases}$

Vậy $D(0;1;6)$.

Bài 7: Trong không gian Oxyz, cho $A(1;0;-1), B(0;-1;2)$ và $G(2;1;0)$. Biết tam giác ABC có trọng tâm là điểm G. Tọa độ của điểm C là

A. $(5;4;-1)$. **B.** $(-5;-4;1)$. **C.** $(1;2;-1)$. **D.** $(-1;-2;1)$.

Lời giải

Đáp án đúng là A

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\begin{cases} x_C=3.2-1-0 \\ y_C=3.1-0+1 \\ z_C=3.0+1-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=5 \\ y_C=4 \\ z_C=-1 \end{cases}$.

Vậy $C(5;4;-1)$.

Bài 8: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}=(-2;2;2), \vec{b}=(1;-1;-2)$. Côsin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng

A. $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{-\sqrt{2}}{3}$.

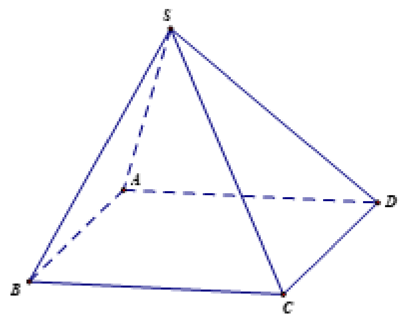
Lời giải

Đáp án đúng là A

Có $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{(-2)\cdot 1+2\cdot(-1)+2\cdot(-2)}{\sqrt{4+4+4}\cdot\sqrt{1+1+4}}=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$.

Bài 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

Lời giải

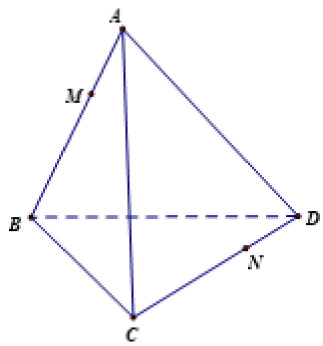


Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}\Leftrightarrow\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$

Bài 10: Cho tứ diện $ABCD$, lấy hai điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{NC}=2\overrightarrow{DN}$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải



Có $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}=\vec{0}$;

$\overrightarrow{NC}=2\overrightarrow{DN}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$

Có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DN}$ (1)

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$(2)

Cộng từng vế (1) và (2), ta được $3\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CN}+2\overrightarrow{DN}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA})+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{CN}+2\overrightarrow{DN})$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AD}$

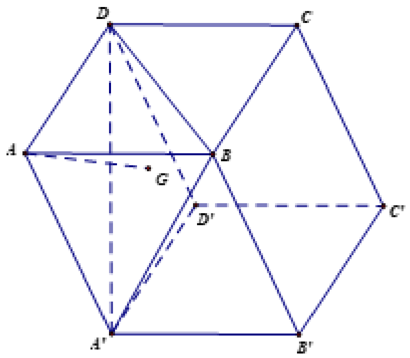
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

Bài 11: Cho hình hộp ABC**D.**A'B'C'D', gọi G là trọng tâm của tam giác BDA'.

a) Biểu diễn $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AA'}$.

b) Từ câu a, hãy chứng tỏ ba điểm A, G và C' thẳng hàng.

Lời giải



a) Vì G là trọng tâm của tam giác BDA' nên

$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GA'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)$

b) Vì ABC**D.**A'B'C'D' là hình hộp nên theo quy tắc hình hộp ta có:

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'(2)}$

Từ (1) và (2), ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$.

Vậy ba điểm A, G và C' thẳng hàng.

Bài 12: Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(2;-1;3), B(1;1;-1)$ và $C(-1;0;2)$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác AB**C.**

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Oz sao cho đường thẳng BM vuông góc với đường thẳng A**C.**

Lời giải

a) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{2+1-1}{3} \\ y = \dfrac{-1+1+0}{3} \\ z = \dfrac{3-1+2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{2}{3} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy $G\left(\frac{2}{3};0;\frac{4}{3}\right)$.

b) Vì M thuộc Oz nên M(0; 0; z).

Khi đó $\overrightarrow{BM} = (-1;-1;z+1)$ và $\overrightarrow{AC} = (-3;1;-1)$.

Vì đường thẳng BM vuông góc với đường thẳng AC nên $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

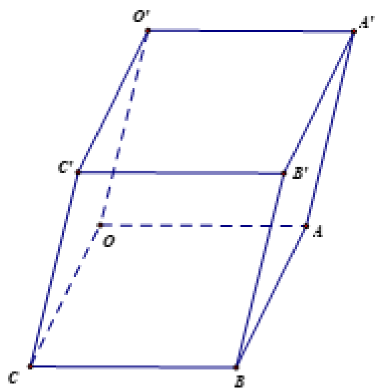
$\Leftrightarrow (-1) \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + (z+1) \cdot (-1) = 0$

$\Leftrightarrow z = 1$

Vậy M(0;0;1).

Bài 13: Trong không gian Oxyz, cho hình hộp OABC.O'A'B'C' và các điểm $A(2;3;1), C(-1;2;3)$ và $O'(1;-2;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

Lời giải



Ta có O(0; 0; 0)

Gọi $B(x_B; y_B; z_B)$.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (2;3;1); \overrightarrow{OC} = (-1;2;3); \overrightarrow{OB} = (x_B; y_B; z_B)$

Ví OABC là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2-1 \\ y_B = 3+2 \\ z_B = 1+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 1 \\ y_B = 5 \\ z_B = 4 \end{cases}$$

Vậy B(1;5;4).

Có $\overrightarrow{OO'} = (1;-2;2); \overrightarrow{CC'} = (x_{C'}+1; y_{C'}-2; z_{C'}-3); \overrightarrow{BB'} = (x_{B'}-1; y_{B'}-5; z_{B'}-4); \overrightarrow{AA'} = (x_{A'}-2; y_{A'}-3; z_{A'}-1)$

Vì OABC.O'A'B'C' là hình hộp nên:

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'}+1 = 1 \\ y_{C'}-2 = -2 \\ z_{C'}-3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'} = 0 \\ y_{C'} = 0 \\ z_{C'} = 5 \end{cases}$$

Vậy C'(0; 0; 5).

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'}-2 = 1 \\ y_{A'}-3 = -2 \\ z_{A'}-1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 3 \\ y_{A'} = 1 \\ z_{A'} = 3 \end{cases}$$

Vậy A'(3; 1; 3).

$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{BB'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} - 1 = 1 \\ y_{B'} - 5 = -2 \\ z_{B'} - 4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} = 2 \\ y_{B'} = 3 \\ z_{B'} = 6 \end{cases}$

Vậy B'(2; 3; 6).

Bài 14: Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a} = (-2; 1; 2), \vec{b} = (1; 1; -1)$

a) Xác định tọa độ của vectơ $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

b) Tính độ dài vectơ $\vec{u}$.

c) Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải

a) Có $2\vec{b} = (2; 2; -2)$.

Khi đó $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b} = (-2 - 2; 1 - 2; 2 + 2) = (-4; -1; 4)$.

b) $|\vec{u}| = \sqrt{16 + 1 + 16} = \sqrt{33}$.

c) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$.

Bài 15: Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(4; 2; -1), B(1; -1; 2)$ và $C(0; -2; 3)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và tính độ dài đoạn thẳng A**B.**

b) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

c) Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oxy), sao cho A, B, N thẳng hàng.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1 - 4; -1 - 2; 2 + 1) = (-3; -3; 3)$.

Có $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$.

b) Giả sử M(x; y; z).

Khi đó $\overrightarrow{CM} = (x; y + 2; z - 3)$

vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ nên $\begin{cases} -3 + x = 0 \\ -3 + y + 2 = 0 \\ 3 + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

Vậy M(3;1;0).

c) Giả sử $N(x; y; 0)$.

Khi đó $\overrightarrow{AN} = (x - 4; y - 2; 1); \overrightarrow{BN} = (x - 1; y + 1; -2)$.

Để A, B, N thẳng hàng thì $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{BN}$ cùng phương tức là $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{BN}$.

Suy ra $\begin{cases}(x-4)=k(x-1)\\ y-2=k(y+1)\\ 1=k(-2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-4)=-\frac{1}{2}(x-1)\\ y-2=-\frac{1}{2}(y+1)\\ k=-\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=1\\ k=-\frac{1}{2}\end{cases}$.

Vậy $N(3;1;0)$.

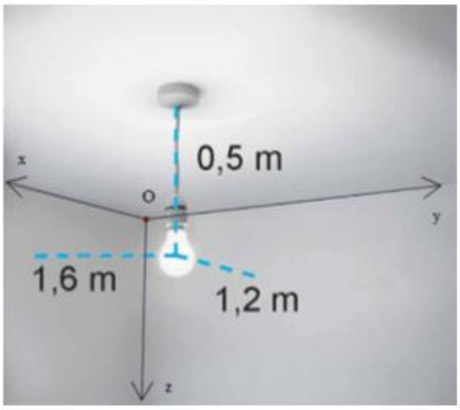
Bài 16: Hình 2.53 minh họa một chiếc đèn được treo cách trần nhà là 0,5 m, cách hai tường lần lượt là 1,2 m và 1,6 m. Hai bức tường vuông góc với nhau và cùng vuông góc với trần nhà. Người ta di chuyển chiếc đèn đó đến vị trí mới cách trần nhà là 0,4 m, cách hai tường đều là 1,5 m.

a) Lập một hệ trục tọa độ Oxyz phù hợp và xác định tọa độ của bóng đèn lúc đầu và sau khi di chuyển.

b) Vị trí mới của bóng đèn cách vị trí ban đầu là bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Hình 2.53

Lời giải



Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ.

Tọa độ bóng đèn lúc đầu là A (1,2; 1,6; 0,5).

Tọa độ bóng đèn lúc sau là B (1,5; 1,5; 0,4).

b) Có $\overrightarrow{AB}=(0{,}3;-0{,}1;-0{,}1)$.

Khi đó $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0,3^2+(-0{,}1)^2+(-0{,}1)^2}\approx 0{,}3$.

Vậy vị trí mới cách vị trí ban đầu của bóng đèn là 0,3 m.

▶CHƯƠNG III. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Bài 1 – KHOẢNG BIẾN THIÊN VÀ KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ

I. KHOẢNG BIẾN THIÊN

Khoảng biến thiên của mẫu ghép nhóm trên là $R = a_{k+1} - a_1$.

Ý nghĩa. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc. Khoảng biến thiên được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Mở đầu trang 75 Toán 12 Tập 1: Thống kê số ngày trong tháng Sáu năm 2021 và năm 2022 theo nhiệt độ cao nhất trong ngày tại Hà Nội, người ta thu được bảng sau:

Nhiệt độ (°C)	[28; 30)	[30; 32)	[32; 34)	[34; 36)	[36; 38)	[38; 40)
Số ngày trong tháng 6/2021	0	2	8	5	6	9
Số ngày trong tháng 6/2022	2	3	4	11	8	2

(Theo *accuweather.com*)

Hỏi tháng Sáu năm nào ở Hà Nội nhiệt độ cao nhất trong ngày biến đổi nhiều hơn?

Lời giải

Sau khi học xong bài này, ta giải quyết bài toán này như sau:

Năm 2021

Khoảng biến thiên: $R_1 = 40 – 30 = 10$.

Ta có cỡ mẫu là n = 30.

Gọi $x_1; x_2; ...; x_{30}$ là nhiệt độ cao nhất trong ngày của 30 ngày tháng Sáu năm 2021 được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Ta có tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là x_8 thuộc nhóm [32; 34). Do đó nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là [32; 34).

Ta có $Q_1 = 32 + \dfrac{\dfrac{30}{4} - 2}{8} \cdot (34 - 32) = 33,375$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là x_{23} thuộc nhóm [38; 40). Do đó nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là $[38;40)$.

Ta có $Q_3 = 38 + \dfrac{\dfrac{3.30}{4} - 21}{9}.(40 - 38) \approx 38,333$.

Do đó khoảng tứ phân vị $D_{10} = 38,333 - 33,375 = 4,958$.

Năm 2022

Khoảng biến thiên $R_2 = 40 - 28 = 12$.

Ta có cỡ mẫu là $n = 30$.

Giả sử $y_1, y_2, \ldots, y_{30}$ là nhiệt độ cao nhất trong ngày của 30 ngày tháng Sáu năm 2022 được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Ta có tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là y_8 thuộc nhóm $[32;34)$ nên nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là $[32;34)$.

Ta có $Q_1 = 32 + \dfrac{\dfrac{30}{4} - 5}{4} \cdot (34 - 32) = 33,25$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là y_{23} thuộc nhóm [36;38) nên nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là $[36;38)$.

Ta có $Q_3 = 36 + \dfrac{\dfrac{3.30}{4} - 20}{8} \cdot (38 - 36) = 36,625$.

Khoảng tứ phân vị: D_{2Q} = 36,625 – 33,25 = 3,375.

Theo khoảng biến thiên: Vì $R_2 > R_1$ nên nhiệt độ cao nhất trong ngày vào tháng 6 năm 2022 biến đổi nhiều hơn nhiệt độ cao nhất trong ngày vào tháng 6 năm 2021.

Theo khoảng tứ phân vị: Vì $D_{1Q} > D_{2Q}$ nên nhiệt độ cao nhất trong ngày vào tháng 6 năm 2021 biến đổi nhiều hơn nhiệt độ cao nhất trong ngày vào tháng 6 năm 2022.

Ví dụ 1: Thống kê thời gian sử dụng mạng xã hội trong ngày của các bạn Tổ 1 , Tổ 2 lớp 12A, được kết quả như bảng sau:

Thời gian sử dụng (phút)	[0; 10)	[10; 30)	[30; 60)	[60; 90)
Số học sinh Tổ 1	2	4	3	1
Số học sinh Tổ 2	5	1	3	0

Tìm khoảng biến thiên cho thời gian sử dụng mạng xã hội của học sinh mỗi tổ và giải thích ý nghĩa.

Lời giải

Gọi R_1, R_2 tương ứng là khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian sử dụng mạng xã hội trong ngày của các bạn Tổ 1 và Tổ 2.

Ta có: $R_1 = 90 - 0 = 90$ và $R_2 = 60 - 0 = 60$.

Do $R_1 > R_2$ nên ta có thể kết luận rằng thời gian sử dụng mạng xã hội trong ngày của các bạn Tổ 1 phân tán hơn thời gian sử dụng mạng xã hội của các bạn Tổ 2.

Luyện tập 1 trang 77 Toán 12 Tập 1: Thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của các bạn trong lớp 12C được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Số học sinh	8	16	4	2

a) Tính khoảng biến thiên R cho mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Nếu biết học sinh hoàn thành bài kiểm tra sớm nhất mất 27 phút và muộn nhất mất 43 phút thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc là bao nhiêu?

Lời giải

a) Khoảng biến thiên R cho mẫu số liệu ghép nhóm là R = 45 – 25 = 20.

b) Nếu biết học sinh hoàn thành bài kiểm tra sớm nhất mất 27 phút và muộn nhất mất 43 phút thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc là 43 – 27 = 16.

II. KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là Δ_Q, là hiệu số giữa tứ phân vị thứ ba Q_3 và tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu đó, tức là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

Ý nghĩa. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc. Khoảng tứ phân vị cũng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm. Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

HĐ2 trang 77 Toán 12 Tập 1: Trong tình huống mở đầu, gọi y1, y2, ..., y30 là nhiệt độ cao nhất trong ngày của 30 ngày tháng Sáu năm 2022 (mẫu số liệu gốc).

a) Có thể tính chính xác khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc hay không?

b) Tìm tứ phân vị thứ nhất Q_1 và tứ phân vị thứ ba Q_3 cho mẫu số liệu ghép nhóm.

c) Hãy đưa ra một giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc.

Lời giải

a) Để tính chính xác khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc, chúng ta cần biết giá trị cụ thể của từng ngày trong tháng Sáu năm 2022. Tuy nhiên, do không có dữ liệu cụ thể, nên không thể tính chính xác khoảng tứ phân vị.

b) Ta có cỡ mẫu là n = 30.

Giả sử $y_1, y_2, ..., y_{30}$ là nhiệt độ cao nhất trong ngày của 30 ngày tháng Sáu năm 2022 được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Ta có tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là y_8 thuộc nhóm [32; 34) nên nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là [32; 34).

Ta có $Q_1 = 32 + \dfrac{\frac{30}{4} - 5}{4} \cdot (34 - 32) = 33,25$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là y_{23} thuộc nhóm [36;38) nên nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là $[36;38)$.

Ta có $Q_3 = 36 + \dfrac{\frac{3,30}{4} - 20}{8} \cdot (38 - 36) = 36,625$.

c) $D_Q = 36,625 - 33,25 = 3,375$.

Ví dụ 2: Thời gian chờ khám bệnh của các bệnh nhân tại phòng khám X được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)
Số bệnh nhân	3	12	15	8

a) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.

b) Từ một mẫu số liệu về thời gian chờ khám bệnh của các bệnh nhân tại phòng khám Y người ta tính được khoảng tứ phân vị bằng 9,23 . Hỏi thời gian chờ của bệnh nhân tại phòng khám nào phân tán hơn?

Lời giải

a) Cỡ mẫu là $n = 3 + 12 + 15 + 8 = 38$. Gọi $x_1, \ldots, x_{38}$ là thời gian chờ khám bệnh của 38 bệnh nhân này và giả sử rằng dãy số liệu gốc này đã được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là x_{10} nên nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là nhóm $[5;10)$ và ta có:

$$Q_1 = 5 + \left[\dfrac{\frac{38}{4} - 3}{12}\right] \cdot 5 \approx 7,71$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là x_{29} nên nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là nhóm [10; 15) và ta có:

$$Q_3 = 10 + \left[\dfrac{\frac{3 \cdot 38}{4} - 15}{15}\right] \cdot 5 = 14,5$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 \approx 14,5 - 7,71 = 6,79$.

b) Do $\Delta_Q = 6,79 < 9,23$ nên thời gian chờ của bệnh nhân tại phòng khám Y phân tán hơn thời gian chờ của bệnh nhân tại phòng khám X.

Luyện tập 2 trang 78 Toán 12 Tập 1: Một người ghi lại thời gian đàm thoại của một số cuộc gọi cho kết quả như bảng sau:

Thời gian t (phút)	Số cuộc gọi
$0 \le t < 1$	8
$1 \le t < 2$	17
$2 \le t < 3$	25
$3 \le t < 4$	20
$4 \le t < 5$	10

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải

Ta có bảng mẫu số liệu ghép nhóm được viết lại như sau

Thời gian t (phút)	[0;1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)
Số cuộc gọi	8	17	25	20	10

Có cỡ mẫu n $= 8 + 17 + 25 + 20 + 10 = 80$.

Giả sử $x_1; x_2; \ldots; x_{80}$ là thời gian đàm thoại của 80 cuộc gọi được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Ta có tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là $\dfrac{x_{20} + x_{21}}{2}$.

Mà $x_{20}\,^{\circ}\,x_{21}$ đều thuộc nhóm [1;2) nên nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là [1;2).

Ta có $Q_1 = 1 + \dfrac{\dfrac{80}{4} - 8}{17}(2-1) \approx 1,7$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là $\dfrac{x_{60} + x_{61}}{2}$.

Mà $x_{60}; x_{61}$ thuộc nhóm $[3;4)$ nên nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là $[3;4)$.

Ta có $Q_3 = 3 + \dfrac{\dfrac{80.3}{4} - 50}{20}(4-3) = 3,5$.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $D_Q = 3,5 - 1,7 = 1,8$.

Vận dụng trang 78 Toán 12 Tập 1: Hãy giải bài toán trong tình huống mở đầu bằng cách sử dụng khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Lời giải

Năm 2021

Khoảng biến thiên: R_1 = 40 – 30 = 10.

Ta có cỡ mẫu là n = 30.

Gọi $x_1; x_2; ...; x_{30}$ là nhiệt độ của 30 ngày tháng Sáu năm 2021 được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Ta có tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là x_8 thuộc nhóm [32; 34). Do đó nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là [32; 34).

Ta có $Q_1 = 32 + \dfrac{\frac{30}{4} - 2}{8}.(34 - 32) = 33,375$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là x_{23} thuộc nhóm [38; 40). Do đó nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là $[38;40)$.

Ta có $Q_3 = 38 + \dfrac{\frac{3.30}{4} - 21}{9}.(40 - 38) = 38,333$.

Do đó khoảng tứ phân vị $D_{1Q} = 38,333 - 33,375 = 4,958$.

Năm 2022

Khoáng biến thiên $R_2 = 40 - 28 = 12$.

Ta có cỡ mẫu là $n = 30$.

Giả sử $y_1, y_2, \ldots, y_{30}$ là nhiệt độ cao nhất trong ngày của 30 ngày tháng Sáu năm 2022 được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Ta có tứ phân vị thứ nhất của mẩu số liệu gốc là y8 thuộc nhóm $[32;34)$ nên nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là $[32;34)$.

Ta có $Q_1 = 32 + \dfrac{\frac{30}{4} - 5}{4} \cdot (34 - 32) = 33,25$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là y_{23} thuộc nhóm [36; 38) nên nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là $[36;38)$.

Ta có $Q_3 = 36 + \dfrac{\frac{3.30}{4} - 20}{8} \cdot (38 - 36) = 36,625$.

Khoảng tứ phân vị: D_{2Q} = 36,625 – 33,25 = 3,375.

Theo khoảng biến thiên: Vì $R_2 > R_1$ nên nhiệt độ cao nhất trong ngày vào tháng 6 năm 2022 biến đổi nhiều hơn nhiệt độ cao nhất trong ngày vào tháng 6 năm 2021.

Theo khoảng tứ phân vị: Vì $D_{1Q} > D_{2Q}$ nên nhiệt độ cao nhất trong ngày vào tháng 6 năm 2021 biến đổi nhiều hơn nhiệt độ cao nhất trong ngày vào tháng 6 năm 2022.

III. GIẢI BÀI TẬP SGK

Bài 1: Thống kê số thẻ vàng của mỗi câu lạc bộ trong giải ngoại hạng Anh mùa giải 2021 – 2022 cho kết quả sau:

101	79	79	78	75	73	68	67	67	63
63	61	60	59	57	55	55	50	47	42.

(Theo *premierleague.com*)

a) Hãy ghép nhóm dãy số liệu trên thành các nhóm có độ dài bằng nhau với nhóm đầu tiên là [40; 50).

b) Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và mẫu số liệu ghép nhóm thu được ở câu a. Giá trị nào là giá trị chính xác? Giá trị nào là giá trị xấp xỉ?

Lời giải

a) Bảng số liệu ghép nhóm:

Số thẻ	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100)	[100; 110)
Tần số	2	5	7	5	0	0	1

Mẫu số liệu gốc

Khoảng biến thiên: $R_1 = 101 - 42 = 59$.

Sắp xếp mẫu số liệu gốc theo thứ tự tăng dần:

42; 47; 50; 55; 55; 57; 59; 60; 61; 63; 63; 67; 67; 68; 73; 75; 78; 79; 79; 101.

Vì n = 20 nên tứ phân vị thứ nhất là trung vị của nhóm 42; 47; 50; 55; 55; 57; 59; 60; 61; 63.

Do đó $Q_1 = \frac{55+57}{2} = 56$.

Tứ phân vị thứ ba là trung vị của nhóm $63;67;67;68;73;75;78;79;79;101$.

Do đó $Q_3 = \frac{73+75}{2} = 74$.

Do đó $D_{1Q} = 74 - 56 = 18$.

Mẫu số liệu ghép nhóm

Khoảng biến thiên là: $R_2 = 110 - 40 = 70$.

Cỡ mẫu là $n = 20$.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{20}$ là số thẻ vàng của mỗi câu lạc bộ trong giải ngoại hạng Anh mùa giải 2021 - 2022 và được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là $\frac{x_5 + x_6}{2}$.

Mà $x_5; x_6$ thuộc nhóm $[50;60)$ nên nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là $[50;60)$.

Ta có $Q_1 = 50 + \frac{\frac{20}{4} - 2}{5} \cdot (60-50) = 56$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là $\frac{x_{15} + x_{16}}{2}$.

Mà $x_{15} : x_{16}$ thuộc nhóm $[70;80)$ nên nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là $[70;80)$.

Ta có $Q_3 = 70 + \frac{\frac{20.3}{4} - 14}{5} \cdot (80-70) = 72$.

Do đó $D_{2Q} = 72 - 56 = 16$.

Giá trị chính xác là R_1 và D_{1Q}; giá trị xấp xỉ là R_2 và D_{2Q}.

Bài 3: Thu nhập theo tháng (đơn vị: triệu đồng) của người lao động ở hai nhà máy như sau:

Thu nhập	[5; 8)	[8; 11)	[11; 14)	[14; 17)	[17; 20)
Số người của nhà máy A	20	35	45	35	20
Số người của nhà máy B	17	23	30	23	17

Tính mức thu nhập trung bình của người lao động ở hai nhà máy trên. Dựa vào khoảng tứ phân vị, hãy xác định xem mức thu nhập của người lao động ở nhà máy nào biến động nhiều hơn.

Lời giải

Chọn giá trị đại diện cho mẫu số liệu ta có:

Thu nhập	[5; 8)	[8; 11)	[11; 14)	[14; 17)	[17; 20)
Giá trị đại diện	6,5	9,5	12,5	15,5	18,5
Số người của nhà máy A	20	35	45	35	20
Số người của nhà máy B	17	23	30	23	17

Mức thu nhập trung bình của người lao động nhà máy A là:

$$\frac{6,5.20+9,5.35+12,5.45+15,5.35+18,5.20}{(20+35+45+35+20)}=12,5 \text{ (triệu đồng)}.$$

Mức thu nhập trung bình của người lao động nhà máy B là:

$$\frac{6,5.17+9,5.23+12,5.30+15,5.23+18,5.17}{(17+23+30+23+17)}=12,5 \text{ (triệu đồng)}.$$

Nhà máy A

Cỡ mẫu $n=20+35+45+35+20=155$.

Gọi $x_1; x_2; \ldots; x_{155}$ là mức thu nhập của 155 công nhân lao động của nhà máy A và được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là x_{39} thuộc nhóm $[8;11)$ nên nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là $[8;11)$.

Ta có $Q_1 = 8+\dfrac{\frac{155}{4}-20}{35}\cdot(11-8)\approx 9,6$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là x_{117} thuộc nhóm $[14;17)$ nên nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là

$\left[14;17\right)$.

Ta có $Q_3 = 14 + \dfrac{\dfrac{155.3}{4} - 100}{35} \cdot (17 - 14) \approx 15,4$.

Khoảng tứ phân vị: R_{AQ} = 15,4 – 9,6 = 5,8.

Nhà máy B

Cỡ mẫu n = 17 + 23 + 30 + 23 + 17 = 110.

Gọi y_1; y_2; ...; y_{110} là mức thu nhập của 110 công nhân lao động của nhà máy B và được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là y_{28} thuộc nhóm [8; 11) nên nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là [8; 11).

Ta có $Q_1 = 8 + \dfrac{\dfrac{110}{4} - 17}{23}.(11 - 8) \approx 9,4$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là y_{83} thuộc nhóm [14; 17) nên nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là $\left[14;17\right)$.

Ta có $Q_3 = 14 + \dfrac{\dfrac{3.10}{4} - 70}{23}.(17 - 14) \approx 15,6$.

Khoảng tứ phân vị .

Vì $R_{BQ} > R_{AQ}$ nên mức thu nhập của người lao động ở nhà máy B biến động nhiều hơn.

Bài 3: Bảng sau đây cho biết chiều cao của các học sinh lớp 12A và 12B.

Chiều cao (cm)	[145; 150)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số học sinh của lớp 12A	1	0	15	12	10	5
Số học sinh của lớp 12B	0	0	17	10	9	6

a) Tìm khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị cho các mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của học sinh lớp 12A, 12B.

b) Để so sánh độ phân tán về chiều cao của học sinh hai lớp này ta nên dùng khoảng biến thiên hay khoảng tứ phân vị? Vì sao?

Lời giải

Lớp 12A

Khoảng biến thiên: R_1 = 175 – 145 = 30.

Cỡ mẫu n = 1 + 0 + 15 + 12 + 10 + 5 = 43.

Gọi x_1; x_2; ...; x_{43} là chiều cao của 43 học sinh lớp 12A được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là x_{11} thuộc nhóm [155; 160) nên nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là [155; 160).

Ta có $Q_1 = 155 + \dfrac{\dfrac{43}{4} - 1}{15} \cdot (160 - 155) = 158,25$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là x33 thuộc nhóm $[165;170)$ nên nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là $[165;170)$.

Ta có $Q_3 = 165 + \dfrac{\dfrac{43,3}{4} - 28}{10} \cdot (170 - 165) = 167,125$.

Khoảng tứ phân vị là $D_{1Q} = 167,125 - 158,25 = 8,875$.

Lớp 12B

Khoảng biến thiên: $R_2 = 175 - 155 = 20$.

Cỡ mẫu $n = 17 + 10 + 9 + 6 = 42$.

Gọi y_1; y_2;...; y_{42} là chiều cao của 42 học sinh lớp 12B và được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là y_{11} thuộc nhóm [155;160) nên nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là $[155;160)$.

Ta có $Q_1 = 155 + \dfrac{\dfrac{42}{4} - 0}{17} \cdot (160 - 155) \approx 158,1$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là y_{32} thuộc nhóm [165;170) nên nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là $[165;170)$.

Ta có $Q_2 = 165 + \dfrac{\dfrac{423}{4} - 27}{9} .(170 - 165) = 167,5$.

Khoảng tứ phân vị là: $R_{2Q} = 167,5 - 158,1 = 9,4$.

b) Để so sánh độ phân tán về chiều cao của học sinh hai lớp này, ta nên dùng khoảng tứ phân vị vì khoảng tứ phân vị chỉ phụ thuộc vào nửa giữa của mẫu số liệu, không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường.

Bài 2 – PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

I. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là s^2, là một số được tính theo công thức sau:

$$s^2 = \frac{m_1\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + m_k\left(x_k - \overline{x}\right)^2}{n}$$

trong đó, $n = m_1 + \ldots + m_k; x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ với $i = 1, 2, \ldots, k$ là giá trị đại diện cho nhóm $\left[a_i; a_{i+1}\right)$ và $\overline{x} = \frac{m_1x_1 + \ldots + m_kx_k}{n}$ là số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là s, là căn bậc hai số học của phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, tức là $s = \sqrt{s^2}$.

Ý nghĩa. Phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là các xấp xỉ cho phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc. Chúng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm xung quanh số trung bình của mẫu số liệu đó. Phương sai, độ lệch chuẩn càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

Chú ý: Người ta còn sử dụng các đại lượng sau để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$s^2 = \frac{m_1\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 + \ldots + m_k\left(x_k - \overline{x}\right)^2}{n-1}, s = \sqrt{s^2}.$$

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Mở đầu trang 80 Toán 12 Tập 1: Để xác định độ ổn định của một máy đo độ ẩm không khí, người ta dùng máy này để đo 20 lần. Nếu độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đo lớn hơn 0,15 thì người ta sẽ đưa máy đo đi sửa chữa. Trong một lần lấy mẫu, kĩ thuật viên có được mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Độ ẩm (%)	[52; 52,1)	[52,1; 52,2)	[52,2; 52,3)	[52,3; 52,4)	[52,4; 52,5)
Tần số	1	5	8	4	2

Liệu có cần đưa máy đo này đi sửa chữa hay không?

Lời giải

Sau khi học xong bài này, ta giải quyết bài toán này như sau:

Chọn giá trị đại diện cho mẫu số liệu ta có:z

Độ ẩm (%)	[52; 52,1)	[52,1; 52,2)	[52,2; 52,3)	[52,3; 52,4)	[52,4; 52,5)
Giá trị đại diện	52,05	52,15	52,25	52,35	52,45
Tần số	1	5	8	4	2

Độ ấm trung bình là: $\frac{52,05.1+52,15.5+52,25.8+52,35.4+52,45.2}{20}=52,255$.

Phương sai:

$$s^2=\frac{52,05^2.1+52,15^2.5+52,25^2.8+52,35^2.4+52,45^2.2}{20}-52,255^2=0,010475.$$

Độ lệch chuẩn là: $s=\sqrt{0,010475}\approx 0,102$.

Vì s $=0,102<0,15$ do đó không cần đưa máy đo này đi sửa chữa.

Ví dụ 1: Người ta theo dõi sự thay đổi cân nặng, được tính bằng hiệu cân nặng trước và sau ba tháng áp dụng chế độ ăn kiêng của một số người cho kết quả như sau:

Thay đổi cân nặng (kg)	[–1; 0)	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)
Số người nam	2	3	5	3	2
Số người nữ	2	7	12	7	2

Tính số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn và nhận xét về sự thay đổi cân nặng của người nam, người nữ sau ba tháng áp dụng chế độ ăn kiêng.

Lời giải

Chọn giá trị đại diện cho các nhóm số liệu, ta có:

Giá trị đại diện	–0,5	0,5	1,5	2,5	3,5
Số người nam	2	3	5	3	2
Số người nữ	2	7	12	7	2

Tổng số người nam là: $n_1=2+3+5+3+2=15$.

Tổng số người nữ là: $n_2=2+7+12+7+2=30$.

Thay đổi cân nặng trung bình của người nam là:

$$\overline{x}_1 = \frac{1}{15}\left[2\cdot(-0,5)+3\cdot 0,5+5\cdot 1,5+3\cdot 2,5+2\cdot 3,5\right]=1,5(\text{ kg})$$

Thay đổi cân nặng trung bình của người nữ là:

$$\overline{x}_2 = \frac{1}{30}\left[2\cdot(-0,5)+7\cdot 0,5+12\cdot 1,5+7\cdot 2,5+2\cdot 3,5\right]=1,5(\text{ kg})$$

Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu về thay đổi cân nặng của người nam là:

$$s_1^2 = \frac{1}{15}\left[2\cdot(-0,5)^2+3\cdot 0,5^2+5\cdot 1,5^2+3\cdot 2,5^2+2\cdot 3,5^2\right]-1,5^2 \approx 1,21^2; s_1 \approx 1,21$$

Phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu về thay đổi cân nặng của người nữ là:

$$s_2^2 = \frac{1}{30}\left[2\cdot(-0,5)^2+7\cdot 0,5^2+12\cdot 1,5^2+7\cdot 2,5^2+2\cdot 3,5^2\right]-1,5^2 \approx 2,06^2; s_2 \approx 2,06.$$

Như vậy, sau ba tháng áp dụng chế độ ăn kiêng này, về trung bình sự thay đổi cân nặng của nam và nữ là như nhau. Tuy nhiên, sự biến động về thay đổi cân nặng của nữ nhiều hơn so với của nam.

Luyện tập 1 trang 82 Toán 12 Tập 1: Một vận động viên luyện tập chạy cự li 100 m đã ghi lại kết quả luyện tập như sau:

Thời gian (giây)	[10,2; 10,4)	[10,4; 10,6)	[10,6; 10,8)	[10,8; 11)
Số vận động viên	3	7	8	2

Tìm phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm này. Phương sai và độ lệch chuẩn cho biết điều gì?

Lời giải

Chọn giá trị đại diện cho mẫu số liệu ta có:

Thời gian (giây)	[10,2; 10,4)	[10,4; 10,6)	[10,6; 10,8)	[10,8; 11)
Giá trị đại diện	10,3	10,5	10,7	10,9
Số vận động viên	3	7	8	2

Tổng số vận động viên là: 3 + 7 + 8 + 2 = 20 .

Thời gian chạy trung bình là: $\frac{10,3.3+10,5.7+10,7.8+10,9.2}{20}=10,59$.

Phương sai của mẫu số liệu là

$$s^2 = \frac{10,3^2.3+10,5^2.7+10,7^2.8+10,9^2.2}{20}-10,59^2 = 0,0299.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là: $s=\sqrt{0,0299}\approx 0,17$.

Dựa vào phương sai và độ lệch chuẩn ta có kết luận rằng mẫu số liệu kết quả luyện tập có tính đồng đều, dữ liệu có xu hướng gần giá trị trung bình và ít bị phân tán.

Vận dụng trang 82 Toán 12 Tập 1: Hãy tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm cho bài toán trong tình huống mở đầu và cho biết có cần đưa máy đi sửa chữa hay không?

Lời giải

Chọn giá trị đại diện cho mẫu số liệu ta có:

Độ ẩm (%)	[52; 52,1)	[52,1; 52,2)	[52,2; 52,3)	[52,3; 52,4)	[52,4; 52,5)
Giá trị đại diện	52,05	52,15	52,25	52,35	52,45
Tần số	1	5	8	4	2

Độ ẩm trung bình là: $\dfrac{52,05.1+52,15.5+52,25.8+52,35.4+52,45.2}{20}=52,255$.

Phương sai:

$$s^2=\frac{52,05^2.1+52,15^2.5+52,25^2.8+52,35^2.4+52,45^2.2}{20}-52,255^2=0,010475.$$

Độ lệch chuẩn là: $s=\sqrt{0,010475}\approx 0,102$.

Vì $s=0,102<0,15$ do đó không cần đưa máy đo này đi sửa chữa.

II. SỬ DỤNG PHƯƠNG SAI, ĐỘ LỆCH CHUẨN ĐO ĐỘ RỦI RO

Để so sánh độ phân tán của hai mẫu số liệu khi đơn vị đo trên hai mẫu số liệu khác nhau hoặc giá trị trung bình của hai mẫu số liệu này khác nhau rất nhiều người ta dùng hệ số biến thiên CV (Coefficient of Variation). Hệ số biến thiên được tính theo công thức:

$$CV=\frac{s}{\overline{x}}$$

trong đó s là độ lệch chuẩn và $\overline{x}$ là số trung bình của mẫu số liệu.

GIẢI HOẠT ĐỘNG SGK

Ví dụ 2: Anh An đầu tư số tiền bằng nhau vào hai lĩnh vực kinh doanh A, B. Anh An thống kê số tiền thu được mỗi tháng trong vòng 60 tháng theo mỗi lĩnh vực cho kết quả như sau:

Số tiền (triệu đồng)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực A	5	10	30	10	5
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực B	20	5	10	5	20

So sánh giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của số tiền thu được mỗi tháng khi đầu tư vào mỗi lĩnh vực A, B. Đầu tư vào lĩnh vực nào "rủi ro" hơn?

Lời giải

Chọn giá trị đại diện cho các nhóm số liệu ta có:

Giá trị đại diện	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực A	5	10	30	10	5
Số tháng đầu tư vào lĩnh vực B	20	5	10	5	20

Số tiền trung bình thu được khi đầu tư vào các lĩnh vực A, B tương ứng là:

$$\overline{x}_A = \frac{1}{60}\left(5\cdot 7,5+\ldots+5\cdot 27,5\right)=17,5 \text{ (trieu đong)};$$

$$\overline{x}_B = \frac{1}{60}\left(20\cdot 7,5+\ldots+20\cdot 27,5\right)=17,5 \text{ (trieu đong)}.$$

Như vậy, về trung bình đầu tư vào các lĩnh vực A, B số tiền thu được hàng tháng như nhau.

Độ lệch chuẩn của số tiền thu được hàng tháng khi đầu tư vào các lĩnh vực A, B tương ứng là:

$$s_A = \sqrt{\frac{1}{60}\left(5\cdot 7,5^2+\ldots+5\cdot 27,5^2\right)-(17,5)^2} = 5$$

$$s_B = \sqrt{\frac{1}{60}\left(20\cdot 7,5^2+\ldots+20\cdot 27,5^2\right)-(17,5)^2} \approx 8,42.$$

Như vậy, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu về số tiền thu được hàng tháng khi đầu tư vào lĩnh vực B cao hơn khi đầu tư vào lĩnh vực A. Người ta nói rằng, đầu tư vào lĩnh vực B là "rủi ro" hơn.

Ví dụ sau cho thấy không phải lúc nào ta cũng có thể dùng độ lệch chuẩn của lợi nhuận thu được để so sánh độ rủi ro của các phương án đầu tư.

Ví dụ 3: Thống kê lợi nhuận hàng tháng (đơn vị: triệu đồng) trong 20 tháng của hai nhà đầu tư được cho như sau:

Lợi nhuận	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)
Số tháng	2	4	8	4	2

Bảng 3.2. Lợi nhuận theo tháng của nhà đầu tư nhỏ

Lợi nhuận	[510; 520)	[520; 530)	[530; 540)	[540; 550)	[550; 560)
Số tháng	4	3	6	3	4

Bảng 3.3. Lợi nhuận theo tháng của nhà đầu tư lớn

Tính độ lệch chuẩn của hai mẫu số liệu ghép nhóm trên. Có nên dựa vào độ lệch chuẩn để so sánh độ rủi ro của hai nhà đầu tư này không?

Lời giải

Chọn điểm đại diện cho các nhóm số liệu ta tính được các số đặc trưng như sau:

Lợi nhuận trung bình một tháng của các nhà đầu tư tương ứng là:

$\overline{x_A} = \frac{1}{20}(2\cdot 15 + \ldots + 2\cdot 55) = 35$ (triệu đồng); $\overline{x_B} = \frac{1}{20}(4\cdot 515 + \ldots + 4\cdot 555) = 535$ (triệu đồng).

Độ lệch chuẩn của lợi nhuận hàng tháng của hai nhà đầu tư tương ứng là:

$$s_A = \sqrt{\frac{1}{20}\left(2\cdot 15^2 + \ldots + 2\cdot 55^2\right) - (35)^2} \approx 10,95$$

$$s_B = \sqrt{\frac{1}{20}\left(4\cdot 515^2 + \ldots + 4\cdot 555^2\right) - (535)^2} \approx 13,78$$

Độ lệch chuẩn cho lợi nhuận hàng tháng của nhà đầu tư lớn cao hơn của nhà đầu tư nhỏ. Lợi nhuận trung bình của hai nhà đầu tư khác nhau rất nhiều, do đó ta không nên dùng độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của hai nhà đầu tư này.

III. GIẢI BÀI TẬP SGK

Bài 1: Kiểm tra khối lượng của 30 bao xi măng (đơn vị: kg) được chọn ngẫu nhiên trước khi xuất xưởng cho kết quả như sau:

49,5	51,1	50,8	50,2	48,7	49,6	51,3	51,4	50,1	50,5
48,9	49,3	50,7	48,8	49,8	48,8	51,2	50,4	50,0	51,2
51,4	48,7	51,2	50,6	50,9	49,2	50,7	51,1	48,6	49,6.

a) Thay dấu "?" bằng số thích hợp để hoàn thiện mẫu số liệu ghép nhóm sau.

Nhóm số liệu	[48,5; 49)	[49; 49,5)	[49,5; 50)	[50; 50,5)	[50,5; 51)	[51; 51,5)
Số bao xi măng	?	?	?	?	?	?

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc và mẫu số liệu ghép nhóm. Giá trị nào là giá trị chính xác? Giá trị nào là giá trị xấp xỉ?

Lời giải

a) Chọn giá trị đại diện cho mẫu số liệu ta có:

Nhóm số liệu	[48,5; 49)	[49; 49,5)	[49,5; 50)	[50; 50,5)	[50,5; 51)	[51; 51,5)
Số bao xi măng	6	2	4	4	6	8

b) Mẫu số liệu gốc

Giá trị trung bình là:

$$\overline{x}=\begin{pmatrix}49,5+48,9+51,4+51,1+49,3+48,7+50,8+50,7+51,2+50,2+48,8+50,6+\\48,7+49,8+50,9+49,6+48,8+49,2+51,3+51,2+50,7+51,4+50,4+51,1+\\50,1+50,0+48,6+50,5+51,2+49,6\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{30}$$

$$\overline{x}=\frac{15043}{300}$$

Phương sai

Ta có bảng sau

Giá trị	Độ lệch	Bình phương độ lệch	Giá trị	Độ lệch	Bình phương độ lệch
49,5	$-\frac{193}{300}$	$\frac{37249}{90000}$	49,6	$-\frac{163}{300}$	$\frac{26569}{90000}$
48,9	$-\frac{373}{300}$	$\frac{139129}{90000}$	48,8	$-\frac{403}{300}$	$\frac{162409}{90000}$
51,4	$\frac{377}{300}$	$\frac{142129}{90000}$	49,2	$-\frac{283}{300}$	$\frac{50039}{90000}$
51,1	$\frac{287}{300}$	$\frac{82369}{90000}$	51,3	$\frac{347}{300}$	$\frac{120409}{90000}$
49,3	$-\frac{253}{300}$	$\frac{64009}{90000}$	51,2	$\frac{317}{300}$	$\frac{100489}{90000}$
48,7	$-\frac{433}{300}$	$\frac{187459}{90000}$	50,7	$\frac{167}{300}$	$\frac{27839}{90000}$
50,8	$\frac{197}{300}$	$\frac{38809}{90000}$	51,4	$\frac{377}{300}$	$\frac{142129}{90000}$
50,7	$\frac{167}{300}$	$\frac{27889}{90000}$	50,4	$\frac{77}{300}$	$\frac{5929}{90000}$
51,2	$\frac{317}{300}$	$\frac{100089}{90000}$	51,1	$\frac{287}{300}$	$\frac{82369}{90000}$
50,2	$\frac{17}{300}$	$\frac{289}{90000}$	50,1	$-\frac{13}{300}$	$\frac{169}{90000}$
48,8	$-\frac{403}{300}$	$\frac{162409}{90000}$	50,0	$-\frac{43}{300}$	$\frac{1849}{90000}$

50,6	$\frac{137}{300}$	$\frac{18769}{90000}$	48.6	$-\frac{463}{300}$	$\frac{214369}{90000}$
48,7	$-\frac{433}{300}$	$\frac{187489}{90000}$	50,5	$\frac{107}{300}$	$\frac{11449}{90000}$
49,8	$-\frac{103}{300}$	$\frac{10609}{90000}$	51,2	$\frac{317}{300}$	$\frac{100489}{90000}$
50,9	$\frac{227}{300}$	$\frac{51529}{90000}$	49,6	$-\frac{163}{300}$	$\frac{26569}{90000}$

Tổng bình phương độ lệch là: $\frac{78461}{3000}$.

Khi đó phương sai: $s^2 = \frac{78461}{3000} \cdot \frac{1}{30} = \frac{78461}{90000}$.

Độ lệch chuẩn là $s = \sqrt{\frac{78461}{90000}} \approx 0,934$.

Mẫu số liệu ghép nhóm

Chọn giá trị đại diện cho mẫu số liệu ta có:

Nhóm số liệu	[48,5; 49)	[49; 49,5)	[49,5; 50)	[50; 50,5)	[50,5; 51)	[51; 51,5)
Giá trị đại diện	48,75	49,25	49,75	50,25	50,75	51,25
Số bao xi măng	6	2	4	4	6	8

Giá trị trung bình là:

$$\bar{x} = \frac{48,75.6 + 49,25.2 + 49,75.4 + 50,25.4 + 50,75.6 + 51,25.8}{30} = \frac{3011}{60}.$$

Phương sai:

$$s^2 = \frac{48,75^2.6 + 49,25^2.2 + 49,75^2.4 + 50,25^2.4 + 50,75^2.6 + 51,25^2.8}{30} - \left(\frac{3011}{60}\right)^2 = \frac{194}{225}.$$

Độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{\frac{194}{225}} \approx 0,929$.

Giá trị mẫu số liệu gốc là chính xác, giá trị mẫu số liệu ghép nhóm là xấp xỉ.

Bài 2: Tuổi thọ của một số linh kiện điện tử (đơn vị: năm) được sản cuất bởi hai phân xưởng được cho như sau:

Tuổi thọ (năm)	[1,5; 2)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)
Số linh kiện của phân xưởng 1	4	9	13	8	6
Số linh kiện của phân xưởng 2	2	8	20	7	3

Tìm phương sai và độ lệch chuẩn của mỗi mẫu số liệu ghép nhóm và nhận xét về độ phân tán của tuổi thọ các linh kiện điện tử được sản xuất bởi mỗi phân xưởng.

Lời giải

Chọn giá trị đại diện cho mẫu số liệu ta có:

Tuổi thọ (năm)	[1,5; 2)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)
Giá trị đại diện	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75
Số linh kiện của phân xưởng 1	4	9	13	8	6
Số linh kiện của phân xưởng 2	2	8	20	7	3

Tuổi thọ trung bình của các linh kiện của phân xưởng 1 là:

$$\overline{x_1} = \frac{4.1,75+9.2,25+13.2,75+8.3,25+6.3,75}{4+9+13+8+6} = 2,7875.$$

Tuổi thọ trung bình của các linh kiện của phân xưởng 2 là:

$$\overline{x_2} = \frac{2.1,75+8.2,25+20.2,75+7.3,25+3.3,75}{2+8+20+7+3} = 2,7625.$$

Phương sai và độ lệch chuẩn của các linh kiện của phân xưởng 1 là:

Suy ra $s_1^2 = \dfrac{4.1,75^2+9.2,25^2+13.2,75^2+8.3,25^2+6.3,75^2}{40} - (2,7875)^2 \approx 0,355$.

Phương sai và độ lệch chuẩn của các linh kiện của phân xưởng 2 là:

$$s_2^2 = \frac{2.1,75^2+8.2,25^2+20.2,75^2+7.3,25^2+3.3,75^2}{40} - (2,7625)^2 \approx 0,219.$$

Suy ra $s_2 = \sqrt{0,219} \approx 0,47$.

Đối với mẫu số liệu này thì phương sai và độ lệch chuẩn nhó nên độ phân tán của số liệu thấp. Do đó các giá trị của mẫu số liệu tập trung quanh giá trị trung bình.

Bài 3: Một nhóm 20 học sinh dùng một thiết bị đo đường kính của một nhân tế bào cho kết quả như sau:

Kết quả đo (μm)	[4,5; 5)	[5; 5,5)	[5,5; 6)	[6; 6,5)
Số học sinh	3	8	7	2

a) Tính số trung bình và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Số trung bình và độ lệch chuẩn cho biết thông tin gì?

Lời giải

Chọn giá trị đại diện cho mẫu số liệu ta có:

Kết quả đo (μm)	[4,5; 5)	[5; 5,5)	[5,5; 6)	[6; 6,5)
Giá trị đại diện	4,75	5,25	5,75	6,25
Số học sinh	3	8	7	2

a) $\overset{\bullet}{x} = \dfrac{4,75.3 + 5,25.8 + 5,75.7 + 6,25.2}{20} = 5,45$.

$$s^2 = \frac{4,75^2.3 + 5,25^2.8 + 5,75^2.7 + 6,25^2.2}{20} - 5,45^2 = 0,185.$$

$s = \sqrt{0,185} \approx 0,43$.

b) Dữ liệu cho thấy đường kính của các nhân tế bào có mức độ biến động nhỏ và gần giá trị trung bình. Điều này có thể thấy được mức độ đồng đều trong kích thước của các nhân tế bào hoặc quy trình đo lường được thực hiện một cách chính xác.

Bài 4: Thời gian chạy tập luyện cự li 100m cuả hai vận động viên được cho trong bảng sau:

Thời gian (giây)	[10; 10,3)	[10,3; 10,6)	[10,6; 10,9)	[10,9; 11,2)
Số lần chạy của A	2	10	5	3
Số lần chạy của B	3	7	9	6

Dựa trên độ lệch chuẩn của các mẫu số liệu ghép nhóm, hãy cho biết vận động viên nào có thành tích luyện tập ổn định hơn.

Lời giải

Chọn giá trị đại diện cho mẫu số liệu ta có:

Thời gian (giây)	[10; 10,3)	[10,3; 10,6)	[10,6; 10,9)	[10,9; 11,2)
Giá trị đại diện	10,15	10,45	10,75	11,05
Số lần chạy của A	2	10	5	3
Số lần chạy của B	3	7	9	6

Thời gian chạy trung bình của A là:

$$\overline{x_A} = \frac{10,15.2 + 10,45.10 + 10,75.5 + 11,05.3}{20} = 10,585.$$

Thời gian chạy trung bình của B là:

$$\overline{x_B} = \frac{10,15.3 + 10,45.7 + 10,75.9 + 11,05.6}{25} = 10,666.$$

Phương sai và độ lệch chuẩn của A là

$$s_A^2 = \frac{10,15^2.2 + 10,45^2.10 + 10,75^2.5 + 11,05^2.3}{20} - 10,585^2 \approx 0,067.$$

Suy ra $s_A = \sqrt{0,067} \approx 0,26$.

Phương sai và độ lệch chuẩn của B là

$$s_B^2 = \frac{10,15^2.3 + 10,45^2.7 + 10,75^2.9 + 11,05^2.6}{25} - 10,666^2 \approx 0,083.$$

Suy ra $s_B = \sqrt{0,083} \approx 0,29$.

Vận động viên A có độ lệch chuẩn nhỏ hơn so với vận động viên B. Điều này cho thấy thời gian chạy tập luyện của vận động viên A ít biến động hơn so với vận động viên B. Do đó vận động viên A có thành tích luyện tập ổn định hơn so với vận động viên B.

Bài 5: Có nên dùng phương sai (hoặc độ lệch chuẩn) để so sánh độ phân tán của hai mẫu số liệu ghép nhóm trong mỗi trường hợp sau không? Tại sao?

a) Các mẫu số liệu ghép nhóm về điểm thi tốt nghiệp môn Toán của học sinh hai trường trung học phổ thông có chất lượng tương đương.

b) Các mẫu số liệu ghép nhóm về doanh thu của 100 cửa hàng bán lẻ và doanh thu của 100 siêu thị.

Lời giải

a) Trong trường hợp các mẫu số liệu ghép nhóm về đểm thi tốt nghiệp môn Toán của học sinh hai trường trung học phổ thông có chất lượng tương đương, phương sai hoặc độ lệch chuẩn có thể được sử dụng để so sánh độ phân tán của hai mẫu số liệu vì chất lượng hai trường là tương đương. Dùng phương sai hoặc độ lệch chuẩn giúp đánh giá mức độ biến động của điểm thi từ đó so sánh độ phân tán giữa hai trường.

b) Trong trường hợp này việc sử dụng phương sai hoặc độ lệch chuẩn để so sánh độ phân tán có thể không phản ánh đúng bản chất của dữ liệu. Vì doanh thu thường có phân phối không đồng đều, có nhiều yếu tố ảnh hưởng đến doanh thu của từng cửa hàng hoặc siêu thị. Do đó việc sử dụng phương sai hoặc độ lệch chuẩn không phải là phương pháp phù hợp để so sánh độ phân tán của doanh thu của hai nhóm này.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

Bài 1: Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14; 15)	[15; 16)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)
Số con hổ	1	3	8	6	2

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm này là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Đáp án đúng là C

Khoảng biến thiên R = 19 – 14 = 5.

Bài 2: Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14; 15)	[15; 16)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)
Số con hổ	1	3	8	6	2

Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

A. $[14;15)$. **B.** $[15;16)$. **C.** $[16;17)$. **D.** $[17;18)$.

Lời giải

Đáp án đúng là C

Cỡ mẫu là: $1+3+8+6+2=20$.

Gọi $x_1;x_2;\ldots;x_{20}$ là tuổi thọ của 20 con hổ được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\dfrac{x_5+x_6}{2}$.

Mà $x_5;x_6$ đều thuộc nhóm [16; 17) nên nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là [16; 17).

Bài 3: Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14; 15)	[15; 16)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)
Số con hổ	1	3	8	6	2

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là

A. $[15;16)$. **B.** $[16;17)$. **C.** $[17;18)$. **D.** $[18;19)$.

Lời giải

Đáp án đúng là C

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\dfrac{x_{15}+x_{16}}{2}$.

Mà x_{15}; x_{16} đều thuộc nhóm [17; 18). Do đó nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là [17; 18).

Bài 4: Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14; 15)	[15; 16)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)
Số con hổ	1	3	8	6	2

Số đặc trưng nào không sử dụng thông tin của nhóm số liệu đầu tiên và nhóm số liệu cuối cùng.

A. Khoảng biến thiên. **B.** Khoảng tứ phân vị.
C. Phương sai. **D.** Độ lệch chuẩn.

Lời giải

Đáp án đúng là B

Số đặc trưng không sử dụng thông tin của nhóm số liệu đầu tiên và nhóm số liệu cuối cùng là khoảng tứ phân vị.

Bài 5: Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con hổ và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14; 15)	[15; 16)	[16; 17)	[17; 18)	[18; 19)
Số con hổ	1	3	8	6	2

Nếu thay tất cả các tần số trong mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng 4 thì số đặc trưng nào sau đây không thay đổi?

A. Khoảng biến thiên. **B.** Khoảng tứ phân vị.
C. Phương sai. **D.** Độ lệch chuẩn.

Lời giải

Đáp án đúng là A

Khoảng biến thiên sẽ không thay đổi nếu thay tất cả các tần số trong mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng 4.

Bài 6: Để đánh giá chất lượng một loại pin điện thoại mới, người ta ghi lại thời gian nghe nhạc liên tục của điện thoại được sạc đầy pin cho đến khi hết pin cho kết quả sau:

Thời gian (giờ)	[5; 5,5)	[5,5; 6)	[6; 6,5)	[6,5; 7)	[7; 7,5)
Số chiếc điện thoại (tần số)	2	8	15	10	5

Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải

Khoảng biến thiên: R = 7,5 – 5 = 2,5.

Cỡ mẫu là n = 2 + 8 + 15 + 10 + 5 = 40.

Gọi x_1; x_2; ...; x_{40} thời gian nghe nhạc liên tục của điện thoại được sạc đầy pin cho đến khi hết pin và được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{x_{10}+x_{11}}{2}$.

Mà $x_{10} \in [5,5;6); x_{11} \in [6;6,5)$. Do đó $Q_1 = 6$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{x_{30}+x_{31}}{2}$.

Mà $x_{30}; x_{31} \in [6,5;7)$ nên nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là $[6,5;7)$.

Ta có $Q_3 = 6,5 + \frac{\frac{3.40}{4} - 25}{10}.(7-6,5) = 6,75$.

Khoảng tứ phân vị $\mathrm{D_Q} = \mathrm{Q_3} - \mathrm{Q_1} = 6,75 - 6 = 0,75$.

Chọn giá trị đại diện cho mẫu số liệu ta có

Thời gian (giờ)	[5; 5,5)	[5,5; 6)	[6; 6,5)	[6,5; 7)	[7; 7,5)
Giá trị đại diện	5,25	5,75	6,25	6,75	7,25
Số chiếc điện thoại (tần số)	2	8	15	10	5

Thời gian trung bình là

$$\bar{x} = \frac{5,25.2 + 5,75.8 + 15.6,25 + 10.6,75 + 5.7,25}{40} = 6,35.$$

Phương sai và độ lệch chuẩn là:

$$s^2 = \frac{5,25^2.2 + 5,75^2.8 + 15.6,25^2 + 10.6,75^2 + 5.7,25^2}{40} - 6,35^2 = 0,2775.$$

Suy ra $s = \sqrt{0,2775} \approx 0,53$.

Bài 7: Người ta ghi lại tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) của một số nhà đầu tư (với số tiền đầu tư như nhau), khi đầu tư vào hai lĩnh vực A, B cho kết quả như sau:

a) Về trung bình, đầu tư vào lĩnh vừa nào đem lại tiền lãi cao hơn?

b) Tính độ lệch chuẩn cho các mẫu số liệu về tiền lãi của các nhà đầu tư ở hai lĩnh vực này và giải thích ý nghĩa của các số thu được.

Lời giải

a) Chọn giá trị đại diện cho mẫu số liệu ta có:

Tiền lãi	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Giá trị đại diện	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực A	2	5	8	6	4
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực B	8	4	2	5	6

Trung bình tiền lãi đầu tư vào lĩnh vực A là:

$$\overline{x_A} = \frac{2.7,5 + 5.12,5 + 8.17,5 + 6.22,5 + 4.27,5}{25} = 18,5.$$

Trung bình tiền lãi đầu tư vào lĩnh vực B là:

$$\overline{x_B} = \frac{8.7,5+4.12,5+2.17,5+5.22,5+6.27,5}{25} = 16,9.$$

V $\overline{x_A} > \overline{x_B}$ nên đầu tư vào lĩnh vực A thì đem lại lãi cao hơn.

b) Phương sai và độ lệch chuẩn của tiền lãi của nhà đầu tư vào lĩnh vực A

$$s_A^2 = \frac{2.7,5^2+5.12,5^2+8.17,5^2+6.22,5^2+4.27,5^2}{25} - 18,5^2 = 34.$$

Suy ra $s_A = \sqrt{34} \approx 5,83$.

Phương sai và độ lệch chuẩn của tiền lãi của nhà đầu tư vào lĩnh vực B

$$s_B^2 = \frac{8.7,5^2+4.12,5^2+2.17,5^2+5.22,5^2+6.27,5^2}{25} - 16,9^2 = 64,64.$$

Suy ra $s_B = \sqrt{64,64} \approx 8,04$.

Dựa vào độ lệch chuẩn, ta thấy rằng tiền lãi của các nhà đầu tư trong linh vực B có sự biến động lớn hơn và có xu hướng phân tán rộng hơn so với tiền lãi của các nhà đầu tư trong lĩnh vực **A.**

Bài 8: Thành tích môn nhảy cao của các vận động viên tại một giải điền kinh dành cho học sinh trung học phổ thông như sau:

Mức xà (cm)	[170; 172)	[172; 174)	[174; 176)	[176; 180)
Số vận động viên	3	10	6	1

a) Tính các số đặc trưng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Độ phân tán của mẫu số liệu cho biết điều gì?

Lời giải

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là: R = 180 – 170 = 10.

Cỡ mẫu là: n = 3 + 10 + 6 + 1 = 20.

Gọi $x_1; x_2;.; x_{20}$ là mức xà của 20 vận động viên được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là $\frac{x_5+x_6}{2}$ mà x_5; x_6 thuộc nhóm [172; 174).

Ta có $Q_1 = 172 + \frac{\frac{20}{4} - 3}{10} \cdot (174 - 172) = 172,4$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là $\frac{x_{15}+x_{16}}{2}$ mà x15; x_{16} thuộc nhóm $[174;176)$.

Ta có $Q_3 = 174 + \frac{\frac{3.20}{4} - 13}{6}.(176-174) \approx 174,7$.

Do đó khoảng tứ phân vị là $\Delta_Q = 174,7 - 172,4 = 2,3$.

Chọn giá trị đại diện cho mẫu số liệu ta có

Mức xà (cm)	[170; 172)	[172; 174)	[174; 176)	[176; 180)
Giá trị đại diện	171	173	175	178
Số vận động viên	3	10	6	1

Mức xà trung bình là:

$$\bar{x} = \frac{3.171 + 10.173 + 6.175 + 1.178}{20} = 173,55.$$

Phương sai và độ lệch chuẩn

$$s^2 = \frac{3.171^2 + 10.173^2 + 6.175^2 + 1.178^2}{20} - 173,55^2 \approx 2,75.$$

Suy ra $s = \sqrt{2,75} \approx 1,66$.

b) Dựa vào các số liệu ở câu a, ta thấy mẫu dữ liệu có sự biến động lớn, các giá trị phân tán rộng và không đồng đều.Có sự chênh lệch đáng kể giữa các kết quả của các vận động viên.

Bài 9: Trong thực hành đo hiệu điện thế của mạch điện, An và Bình đã dùng hai vôn kế khác nhau để đo, mỗi bạn tiến hành đo 10 lần và cho kết quả như sau:

Hiệu điện thế đo được (Vôn)	[3,85; 3,90)	[3,90; 3,95)	[3,95; 4,00)	[4,00; 4,05)
Số lần An đo	1	6	2	1
Số lần Bình đo	1	3	4	2

Tính độ lệch chuẩn của các mẫu số liệu ghép nhóm cho kết quả đo của An và Bình. Từ đó kết luận xem vôn kế của bạn nào cho kết quả đo ổn định hơn.

Lời giải

Chọn giá trị đại diện cho mẫu số liệu ta có:

Hiệu điện thế đo được (Vôn)	[3,85; 3,90)	[3,90; 3,95)	[3,95; 4,00)	[4,00; 4,05)
Giá trị đại diện	3,875	3,925	3,975	4,025
Số lần An đo	1	6	2	1
Số lần Bình đo	1	3	4	2

Hiệu điện thế trung bình của An đo là:

$$\overline{x_1} = \frac{3,875.1 + 3,925.6 + 3,975.2 + 4,025.1}{10} = 3,94.$$

Hiệu điện thế trung bình của Bình đo là:

$$\overline{x_2} = \frac{3,875.1 + 3,925.3 + 3,975.4 + 4,025.2}{10} = 3,96.$$

Phương sai và độ lệch chuẩn về mẫu số liệu ghép nhóm của An đo là:

$$s_1^2 = \frac{3,875^2 \cdot 1 + 3,925^2.6 + 3,975^2.2 + 4,025^2.1}{10} - 3,94^2 = 1,525 \cdot 10^{-3}.$$

Suy ra $s_1 = \sqrt{1,525 \cdot 10^{-3}} \approx 0,039$.

Phương sai và độ lệch chuẩn về mẫu số liệu ghép nhóm của Bình đo là:

$$s_2^2 = \frac{3,875^2 \cdot 1 + 3,925^2 \cdot 3 + 3,975^2.4 + 4,025^2.2}{10} - 3,96^2 = 2,025 \cdot 10^{-3}.$$

Suy ra $s_2 = \sqrt{2,025 \cdot 10^{-3}} = 0,045$.

Dựa vào kết quả tính được của độ lệch chuẩn, ta thấy vôn kế của An cho kết quả ổn định hơn vôn kế của Bình.